

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ - ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Στ' Τάξη

Μέρος 6



Συγγραφική ομάδα:	Αθανασίου Χρύσω Δεληγιάννη Ελένη Πανασούρα-Μάκη Γεωργία Παντζιάρá Μαριλένα Χειμωνή Μαρία
Επιστημονικοί συνεργάτες:	Πανασούρα Ρίτα, Πανεπιστήμιο Frederick Πίπτα-Πανταζή Δήμητρα, Πανεπιστήμιο Κύπρου Πιπάλης Μάριος, Πανεπιστήμιο Κύπρου Χρίστου Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Σύνδεσμος Πρώτος Λειτουργός Εκπαίδευσης:	Χαμπιαούρης Κώστας
Ηλεκτρονικός σχεδιασμός:	Χατζηθεοδοσίου Άντρη, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Ηλ. σελίδωση:	Χατζηθεοδοσίου Άντρη Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Επιμέλεια έκδοσης:	Άστρα Ιωάννου Μαρίνα, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση: 2017

Ανατύπωση: 2017

Εκτύπωση: Τυπογραφείο Κυπριακής Δημοκρατίας

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-0-1618-1



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Τα Μαθηματικά έχουν πρωτεύοντα ρόλο στους σχεδιασμούς του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού στο νέο εκπαιδευτικό περιβάλλον που οικοδομείται. Με την εφαρμογή του αναθεωρημένου Αναλυτικού Προγράμματος Μαθηματικών, οι σκοποί, οι στόχοι, το περιεχόμενο, οι μέθοδοι διδασκαλίας και αξιολόγησης στο μάθημα διαφοροποιούνται. Στηρίζονται σε διεθνή αποτελέσματα και σε διεθνώς δοκιμασμένες πρακτικές και λαμβάνουν υπόψη τις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην Κύπρο κατά τη μετάβασή τους από τη μία βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη. Επίσης, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στον εκσυγχρονισμό των Μαθηματικών, ώστε να έχουν άμεση σχέση και εφαρμογή στην καθημερινή ζωή, να αναπτύσσουν την κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητα και γενικά να συνάδουν με τις ανάγκες της κοινωνίας μας και με τα Αναλυτικά Προγράμματα των πλείστων χωρών της Ευρώπης.

Ανάμεσα στις προτεραιότητές μας είναι η ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης σύνθετων προβλημάτων, ώστε τα σημερινά παιδιά και αυριανοί πολίτες να αποκτήσουν τέτοιες δεξιότητες που να προωθούν την ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της καινοτομίας, κάτι που σήμερα είναι απαραίτητο στη σύγχρονη κοινωνία. Με βάση αυτές τις προτεραιότητες που θέσαμε, ξεκίνησε η συγγραφή των νέων βιβλίων των Μαθηματικών, τα οποία απευθύνονται σε όλα τα παιδιά, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις ιδιαιτερότητες του καθενός.

Τα νέα εγχειρίδια των Μαθηματικών περιλαμβάνουν πρωτοποριακές μεθόδους και πρακτικές διδασκαλίας. Ειδικότερα, τα νέα εγχειρίδια της Στ' τάξης έχουν διαμορφωθεί ώστε να προετοιμάσουν τα παιδιά για τα Μαθηματικά της Α' Γυμνασίου. Στην αρχή κάθε ενότητας, γίνεται παράθεση των θεμάτων. Ακολουθεί η διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των παιδιών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι νέες έννοιες και παραδείγματα δραστηριοτήτων. Τα μαθήματα ολοκληρώνονται με διαβαθμισμένες δραστηριότητες, μέσα από τις οποίες τα παιδιά επιλύουν προβλήματα της καθημερινότητας και έχουν τη δυνατότητα να κατανοήσουν έννοιες και να αποκτήσουν δεξιότητες ανάλογα με τις ανάγκες και τις προσδοκίες τους. Αξιοποιούν, ταυτόχρονα, τη σύγχρονη τεχνολογία με τρόπο που συμβάλλει αποτελεσματικά στην επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Ελπιδοφόρος Νεοκλέους
Διευθυντής Δημοτικής Εκπαίδευσης

Περιεχόμενα

	Σελίδα
ΕΝΟΤΗΤΑ 11	7
Αναλογίες, Ποσοστά, Πιθανότητες	
ΕΝΟΤΗΤΑ 12	71
Κύκλος, Μετασχηματισμοί, Στερεομετρία, Όγκος	



ΕΝΟΤΗΤΑ 11



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να επιλύουμε προβλήματα αναλογιών και ποσοστών, εφαρμόζοντας κατάλληλες στρατηγικές.
- Να αναγνωρίζουμε ποσά που είναι ευθέως ανάλογα και να συμπληρώνουμε πίνακες αναλογιών.
- Να αναπαριστούμε και να ερμηνεύουμε τη γραφική αναπαράσταση μιας σχέσης αναλογίας.
- Να αναγνωρίζουμε τι είναι πείραμα τύχης και να περιγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματά του.
- Να υπολογίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Έχουμε μάθει:

- Να συγκρίνουμε λόγους.
- Να ορίζουμε την αναλογία.
- Να ερμηνεύουμε σχέδια υπό κλίμακα.
- Να ορίζουμε την έννοια του ποσοστού ως λόγο.
- Να μετατρέπουμε δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα και ποσοστά και το αντίστροφο.

Ένα ζαχαροπλαστείο θα προμηθευτεί κονσέρβες με φρούτα. Ο υπεύθυνος του ζαχαροπλαστείου μελετά τις πιο κάτω προσφορές, οι οποίες αφορούν κονσέρβες ίδιας ποσότητας και ποιότητας.

ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α

5 κονσέρβες προς €2

ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β

7 κονσέρβες προς €3



Τοια από τις προσφορές είναι πιο συμφέρουσα; Να επεξηγήσετε.

Διερεύνηση 1

Ένας μελισσοκόμος συμπληρώνει τη διατροφή των μελισσών της κυψέλης με σιρόπι. Η αναλογία του σιροπιού που παρασκευάζει αλλάζει ανάλογα με την εποχή.

Σιρόπι για την άνοιξη

10 φλιτζάνια νερό
15 φλιτζάνια ζάχαρη

Σιρόπι για το φθινόπωρο

5 φλιτζάνια νερό
10 φλιτζάνια ζάχαρη

Τα αποθέματα τροφής μέσα στην κυψέλη συχνά εξαντλούνται. Για τον λόγο αυτό, οι μελισσοκόμοι χρειάζεται να τροφοδοτήσουν τις μέλισσες με σιρόπι, ώστε να διασφαλίσουν την επιβίωση και την ανάπτυξή τους.

(α) Ο μελισσοκόμος θα ετοιμάσει σιρόπι κατά την περίοδο της άνοιξης. Πόσα φλιτζάνια ζάχαρη χρειάζεται, αν θα χρησιμοποιήσει 30 φλιτζάνια νερό;

Νερό (φλιτζάνια)	Ζάχαρη (φλιτζάνια)

(β) Ο μελισσοκόμος θα ετοιμάσει σιρόπι κατά την περίοδο του φθινοπώρου. Πόσα φλιτζάνια ζάχαρη χρειάζεται, αν θα χρησιμοποιήσει 12 φλιτζάνια νερό;

(γ) Ο μελισσοκόμος χρησιμοποίησε συνολικά 24 φλιτζάνια, για να ετοιμάσει σιρόπι κατά την περίοδο του φθινοπώρου. Πόσα φλιτζάνια νερό και πόσα φλιτζάνια ζάχαρη θα χρειαστεί;

(δ) Να περιγράψετε τις στρατηγικές που χρησιμοποιήσατε, για να επιλύσετε κάθε πρόβλημα.

Δραστηριότητα

1. Να επιλύσετε τα προβλήματα.

(α) Η Κατερίνα κατασκευάζει ένα περιδέραιο. Χρησιμοποιεί 2 άσπρες χάντρες για κάθε 6 μπλε χάντρες. Πόσες μπλε χάντρες χρειάζονται, αν οι άσπρες χάντρες στο περιδέραιο είναι 8;

(β) Σε μια αλυκή παράγονται περίπου 3 kg αλάτι, όταν εξατμιστούν 100 L νερού. Πόσα λίτρα νερού πρέπει να εξατμιστούν, για να παραχθούν 36 kg αλάτι;

(γ) Η κυρία Μαρία χρησιμοποιεί 7 κουταλιές γάλα σε σκόνη προς 210 ml νερό, για να ετοιμάσει βρεφικό γάλα. Πόσα χιλιοστόλιτρα νερό χρειάζεται, αν θα χρησιμοποιήσει 5 κουταλιές γάλα σε σκόνη;

(δ) Ο κύριος Νίκος βάφει έναν φράκτη. Χρειάστηκε 3 L μπογιάς, για να βάψει ένα κομμάτι του φράκτη μήκους 45 m. Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστεί, για να βάψει ένα άλλο κομμάτι του φράκτη μήκους 60 m;

Διερεύνηση 2

Στην αναλογία $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$:

- οι a , b , γ και δ ονομάζονται όροι της αναλογίας
- οι a και δ ονομάζονται άκροι όροι της αναλογίας
- οι b και γ ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

(α) Να υπολογίσετε το γινόμενο των άκρων και το γινόμενο των μέσων όρων κάθε αναλογίας στον πιο κάτω πίνακα.

	Αναλογία $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$	Γινόμενο άκρων όρων $a \cdot \delta$	Γινόμενο μέσων όρων $b \cdot \gamma$
A	$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$		
B	$\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$		
Γ	$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$		
Δ	$\frac{4}{20} = \frac{5}{25}$		
Ε	$\frac{10}{15} = \frac{6}{9}$		

Τι παρατηρείτε;

(β) Η Ιωάννα εργάστηκε με τον πιο κάτω τρόπο, για να σχηματίσει αναλογίες.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot a}{5 \cdot a}, \text{ όπου } a \text{ ένας οποιοσδήποτε αριθμός.}$$

Για παράδειγμα,

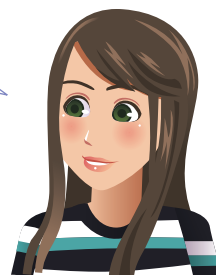
για $a = 3$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

$$\text{Άρα, } \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$$

για $a = 4$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$



Να χρησιμοποιήσετε τον τρόπο σκέψης της Ιωάννας, για να δείξετε γιατί σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Νέες Έννοιες

- **Λόγος** δύο ομοειδών μεγεθών α και β , που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους. Ο λόγος του α προς το β γράφεται ως:

$$\alpha \text{ προς } \beta \text{ ή } \alpha:\beta \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta}$$

Παράδειγμα:

Για την παρασκευή μιας δόσης χυμού μήλου, χρησιμοποιούνται 2 πράσινα και 3 κόκκινα μήλα.



Ο λόγος των πράσινων προς τα κόκκινα μήλα είναι:

$$2 \text{ προς } 3 \text{ ή } 2:3 \text{ ή } \frac{2}{3}$$

- Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών) ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο.

Παράδειγμα:

Σε μια δεξαμενή διοχετεύονται 900 L νερό σε 6 ώρες. Άρα, ο ρυθμός της ποσότητας νερού που διοχετεύεται στη δεξαμενή προς τον χρόνο είναι 150 L νερό την ώρα.

$$\frac{\text{ποσότητα νερού (L)}}{\text{χρόνος (ώρες)}} = \frac{900 \text{ L}}{6 \text{ ώρες}} = \frac{150 \text{ L}}{1 \text{ ώρα}} = 150 \text{ L/ώρα}$$

Νέες Έννοιες

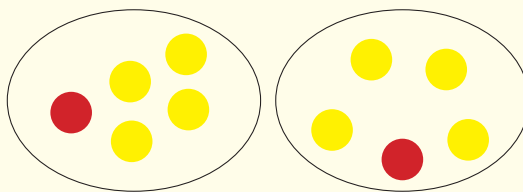
• Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$:

- οι a , b , γ και δ ονομάζονται όροι της αναλογίας
- οι a και δ ονομάζονται άκροι όροι της αναλογίας
- οι b και γ ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

Παράδειγμα:

Ο λόγος των κόκκινων προς τους κίτρινους βόλους είναι 2:8 ή 1:4.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



Οι αριθμοί 1, 2, 4 και 8 ονομάζονται όροι της αναλογίας.

Οι αριθμοί 2 και 4 ονομάζονται άκροι όροι της αναλογίας.

Οι αριθμοί 8 και 1 ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

- Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

Αν $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $a \cdot \delta = b \cdot \gamma$

Παράδειγμα:

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$

$$3 \cdot 16 = 48$$

$$4 \cdot 12 = 48$$

$$3 \cdot 16 = 4 \cdot 12$$

- Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας

Παράδειγμα:

Τα 3 m ύφασμα κοστίζουν €12. Πόσο κοστίζουν τα 9 m ύφασμα;

Ύφασμα (m)	Κόστος (€)
3	12
9	x

Diagram showing multiplication by 3: $\cdot 3$ (from 3 to 9) and $\cdot 3$ (from 12 to x).

$$x = 12 \cdot 3 = 36$$

ή

Ύφασμα (m)	Κόστος (€)
3	12
9	x

Diagram showing multiplication by 4: $\cdot 4$ (from 3 to 12) and $\cdot 4$ (from 9 to x).

$$x = 9 \cdot 4 = 36$$

ή

$$\frac{3}{9} = \frac{12}{x}$$

$$3x = 9 \cdot 12$$

$$3x = 108$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{108}{3}$$

$$x = 36$$

Σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

ή

Αν 3 m ύφασμα $\rightarrow$ €12

τότε 1 m ύφασμα $\rightarrow$ €4

Άρα, 9 m ύφασμα $\rightarrow$ €36 ($9 \cdot 4 = 36$)

Κάνουμε αναγωγή στην ακέραια μονάδα. Το κόστος του υφάσματος είναι €4 το μέτρο.

Παραδείγματα

1. Να ελέγξετε κατά πόσο οι λόγοι $\frac{4}{5}$ και $\frac{32}{40}$ σχηματίζουν αναλογία.

Λύση:

Υπολογίζουμε τα γινόμενα:

$$4 \cdot 40 = 160$$

$$5 \cdot 32 = 160$$

Παρατηρούμε ότι $4 \cdot 40 = 5 \cdot 32$.

Άρα, οι δύο λόγοι σχηματίζουν αναλογία, $\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$.

2. Δίνεται η αναλογία $\frac{15}{20} = \frac{9}{x}$. Να βρείτε την τιμή του x .

Λύση:

$$\frac{15}{20} = \frac{9}{x}$$

$$15x = 20 \cdot 9$$

$$15x = 180$$

$$\frac{\cancel{15}x}{\cancel{15}} = \frac{180}{15}$$

$$x = 12$$

Σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

3. Ο λόγος των σκύλων προς τις γάτες σε ένα καταφύγιο ζώων είναι 3:4. Να υπολογίσετε τον αριθμό των γάτων, αν υπάρχουν 9 σκύλοι στο καταφύγιο.

Λύση:

Σκύλοι	Γάτες
3	4
9	x

$\cdot 3$ $\cdot 3$

$$x = 4 \cdot 3 = 12$$

ή

Σχηματίζουμε την αναλογία $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$, όπου το x αναπαριστά τον αριθμό των γάτων.

$$3x = 4 \cdot 9$$

$$3x = 36$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

Σε μια αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Ο αριθμός των γάτων στο καταφύγιο είναι 12.

Δραστηριότητες

1. Να ελέγξετε κατά πόσο οι δύο λόγοι σχηματίζουν αναλογία.

(α) $\frac{3}{4}$ και $\frac{15}{20}$

(β) $\frac{4}{7}$ και $\frac{6}{14}$

(γ) $\frac{9}{20}$ και $\frac{5}{9}$

(δ) $\frac{5}{8}$ και $\frac{20}{32}$

(ε) $\frac{7}{5}$ και $\frac{28}{20}$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του v στις πιο κάτω αναλογίες.

(α) $\frac{3}{12} = \frac{5}{v}$

(β) $\frac{4}{6} = \frac{12}{v}$

(γ) $\frac{8}{20} = \frac{v}{25}$

(δ) $\frac{v}{15} = \frac{4}{12}$

3. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Ένας θερμοσίφωνας καταναλώνει 1000 W ηλεκτρικού ρεύματος σε 15 λεπτά λειτουργίας. Σε πόσα λεπτά λειτουργίας ο θερμοσίφωνας θα καταναλώσει 3000 W;
- (β) Τα παιδιά της Στ' τάξης ενός σχολείου επισκέφτηκαν ένα εργοστάσιο κονσερβοποιίας. Η επίσκεψη των παιδιών στο εργοστάσιο είχε διάρκεια 35 λεπτά. Πόσες κονσέρβες παράχθηκαν κατά τη διάρκεια της επίσκεψής τους, αν στο εργοστάσιο παράγονται 90 κονσέρβες το λεπτό;
- (γ) Μια φωτογραφία έχει μήκος 10 cm και πλάτος 8 cm. Η φωτογραφία μεγεθύνθηκε, διατηρώντας σταθερό τον λόγο του μήκους προς το πλάτος. Ποιο είναι το πλάτος της φωτογραφίας σε μεγέθυνση, αν το μήκος της είναι 25 cm;

4. Να επιλέξετε τις αναλογίες που ταιριάζουν για την επίλυση κάθε προβλήματος.

- (α) Σε μια συνταγή για τάρτα χρησιμοποιούνται 2 φλιτζάνια ζάχαρη για κάθε 3 φλιτζάνια γάλα. Πόσα φλιτζάνια ζάχαρη χρειάζονται, αν στη συνταγή χρησιμοποιηθούν 9 φλιτζάνια γάλα;

A. $\frac{2}{3} = \frac{9}{\kappa}$

B. $\frac{2}{3} = \frac{\kappa}{9}$

Γ. $\frac{2}{\kappa} = \frac{3}{9}$

Δ. $\frac{9}{3} = \frac{2}{\kappa}$

- (β) Ο λόγος των παιδιών προς τους ενήλικες που παρακολουθούν έναν αγώνα ποδοσφαίρου είναι 2 προς 5. Ποιος είναι ο αριθμός των ενήλικων θεατών, αν ο αριθμός των παιδιών που παρακολουθούν τον αγώνα είναι 140;

A. $\frac{2}{140} = \frac{5}{\nu}$

B. $\frac{2}{5} = \frac{\nu}{140}$

Γ. $\frac{2}{\nu} = \frac{5}{140}$

Δ. $\frac{2}{5} = \frac{140}{\nu}$

- (γ) Σε ένα περιοδικό ο λόγος των σελίδων με διαφημίσεις προς τις σελίδες με ειδήσεις είναι 6:5. Πόσες σελίδες του περιοδικού έχουν διαφημίσεις, αν το περιοδικό έχει συνολικά 143 σελίδες;

A. $\frac{6}{5} = \frac{\chi}{143}$

B. $\frac{6}{11} = \frac{\chi}{143}$

Γ. $\frac{5}{143} = \frac{\chi}{6}$

Δ. $\frac{143}{11} = \frac{\chi}{6}$

Στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Ρίο 2016, η εθνική ομάδα καλαθόσφαιρας των ΗΠΑ είχε ποσοστό επιτυχίας 75% στις ελεύθερες βολές. Ο συνολικός αριθμός των προσπαθειών της ομάδας για εκτέλεση ελεύθερων βολών ήταν 224.

Τα παιδιά χρησιμοποίησαν διαφορετικές στρατηγικές, για να υπολογίσουν τον αριθμό των ελεύθερων βολών που πέτυχε η ομάδα.

$$\frac{75}{100} = \frac{x}{224}$$

$$75 \cdot 224 = 100x$$

$$16\,800 = 100x$$

$$\frac{16\,800}{100} = \frac{100x}{100}$$

$$x = 168$$

Επιτυχημένες ελεύθερες βολές	75	x
Συνολικός αριθμός προσπαθειών	100	224

Άγγελος

Το 50% του 224 είναι το 112.

Το 25% του 224 είναι το 56.

$$112 + 56 = 168$$

Άρα, το 75% του 224 είναι το 168.

Παύλος



$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \overset{56}{\cancel{224}} = 168$$

Βάνια

(α) Να περιγράψετε τη στρατηγική που χρησιμοποίησε κάθε παιδί.

(β) Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογίσετε τα πιο κάτω; Να επεξηγήσετε.

(i) το 20% του 225

(ii) το 5% του 180

(iii) το 52% του 195

Δραστηριότητες

1. Μια ομάδα χειροσφαίρισης επιχορηγήθηκε για τη φετινή χρονιά με €5000. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την ποσοστιαία κατανομή του ποσού της επιχορήγησης.

Να συμπληρώσετε το ακριβές ποσό για κάθε δαπάνη.

Δαπάνη	Ποσοστό	Ποσό (€)
Μπάλες και άλλος εξοπλισμός	10%	
Μεταφορές	25%	
Ενδυμασίες	42%	
Μίσθωση γηπέδου	23%	
Σύνολο		

2. Να συμπληρώσετε, όπως στο παράδειγμα.

Το 10% του 60 είναι 6

Άρα,

Το 20% του 60 είναι $2 \cdot 6 = 12$

Το 5% του 60 είναι $6 \div 2 = 3$

(α)

Το 50% του 48 είναι _____

Άρα ,

Το 25% του 48 είναι _____

Το 75% του 48 είναι _____

(β)

Το 10% του 140 είναι _____

Άρα ,

Το 5% του 140 είναι _____

Το 40% του 140 είναι _____

(γ)

Το 25% του 32 είναι _____

Άρα ,

Το 75% του 32 είναι _____

Το 12,5% του 32 είναι _____

Διερεύνηση 2

Να επιλύσετε και να συζητήσετε τα πιο κάτω προβλήματα.

Α. Ο Τάσος διάβασε τις 20 από τις 40 σελίδες ενός βιβλίου. Ποιο ήταν το ποσοστό των σελίδων του βιβλίου που διάβασε ο Τάσος;

Β. Η Βάνα απάντησε ορθά στο 40% των ερωτήσεων ενός διαγωνισμού. Ποιος ήταν ο συνολικός αριθμός των ερωτήσεων του διαγωνισμού, αν η Βάνα απάντησε ορθά σε 20 ερωτήσεις;

Γ. Το 40% των παιδιών μιας τάξης έχει κατοικίδιο ζώο. Πόσα παιδιά έχουν κατοικίδιο ζώο, αν ο συνολικός αριθμός των παιδιών στην τάξη είναι 20;

Νέες Έννοιες

- Για να επιλύσουμε προβλήματα με ποσοστά, μπορούμε να σχηματίσουμε αναλογία.

Παραδείγματα:

	Αναλογία
Ποιος αριθμός είναι το 50% του 6;	$\frac{50}{100} = \frac{\textcolor{red}{X}}{6}$
Ποιου αριθμού το 3 είναι το 50%;	$\frac{50}{100} = \frac{3}{\textcolor{red}{X}}$
Τι ποσοστό του 6 είναι το 3;	$\frac{3}{6} = \frac{\textcolor{red}{X}}{100}$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τι ποσοστό του 20 είναι το 15.

Λύση:

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{100}$$

$$15 \cdot 100 = 20x$$

$$1500 = 20x$$

$$\frac{1500}{20} = \frac{20x}{20}$$

$$x = 75$$

ή

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100} = 75\%$$

Το 15 είναι το 75% του 20.

	Ποσοστό
15	x
20	100

2. Το 5% μιας παρτίδας ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν προβληματικό σκληρό δίσκο. Πόσοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν προβληματικό σκληρό δίσκο, αν στην παρτίδα περιλαμβάνονται 600 ηλεκτρονικοί υπολογιστές;

Λύση:

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

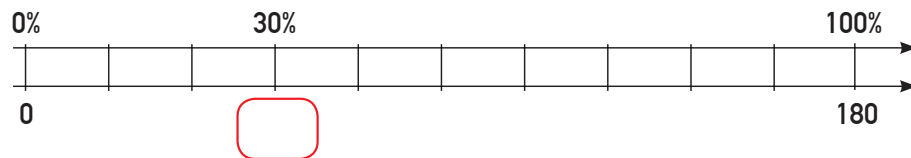
$$\frac{1}{20} \cdot \overset{30}{\cancel{600}} = 30$$

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές που έχουν προβληματικό σκληρό δίσκο είναι 30.

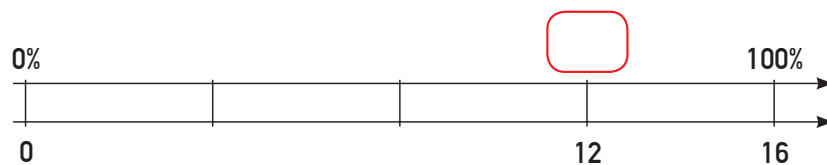
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την άγνωστη ποσότητα σε κάθε περίπτωση.

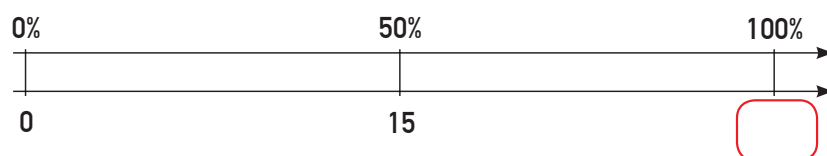
(α) Ποιος αριθμός είναι το 30% του 180;



(β) Τι ποσοστό του 16 είναι το 12;



(γ) Το 50% ενός αριθμού είναι το 15. Ποιος είναι ο αριθμός;



2. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας, για να υπολογίσετε:

(α) Ποιος αριθμός είναι το 12% του 50;

(β) Τι ποσοστό του 300 είναι το 24;

(γ) Ποιου αριθμού το 75% είναι το 12;

(δ) Ποιος αριθμός είναι το 44% του 250;

(ε) Ποιου αριθμού το 15% είναι το 24;

(στ) Τι ποσοστό του 90 είναι το 63;

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

**Καλαθοσφαιρική ομάδα «Αστραπή»
Επίδοση αθλητριών**

Αθλήτρια	Επιτυχημένες προσπάθειες	Συνολικός αριθμός προσπαθειών	Ποσοστό επιτυχίας
Μαρίνα	8	32	
Βασιλική		5	60%
Κατερίνα		20	75%
Λάουρα	5		20%
Βαλέρια	2		10%

4. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Τα 180 παιδιά ενός σχολείου παρακολούθησαν μια κινηματογραφική παράσταση. Τα 135 παιδιά δήλωσαν ότι τους άρεσε η κινηματογραφική παράσταση. Σε τι ποσοστό των παιδιών του σχολείου άρεσε η κινηματογραφική παράσταση;
- (β) Το προσδόκιμο ζωής της μαύρης αρκούδας είναι 40 χρόνια. Το προσδόκιμο ζωής του λύκου είναι ίσο με το 45% του προσδόκιμου ζωής της μαύρης αρκούδας. Ποιο είναι το προσδόκιμο ζωής του λύκου;
- (γ) Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοικτό, με αποτέλεσμα να εξατμιστεί το 22% της ποσότητας οиноπνεύματος που περιείχε. Πόση ήταν η αρχική ποσότητα οινόπνεύματος στο μπουκάλι, αν εξατμίστηκαν 132 ml;
- (δ) Ο Τάσος ξόδεψε €18 από τα €30 που είχε. Η Φάνη ξόδεψε €13 από τα €20 που είχε. Ποιο παιδί ξόδεψε το μεγαλύτερο ποσοστό από τα χρήματα που είχε αρχικά;

Να σχολιάσετε τις πιο κάτω πληροφορίες.

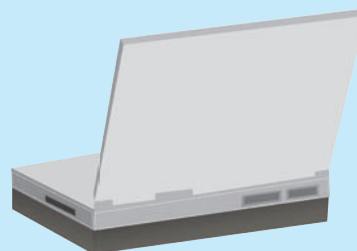


ΑΦΙΞΕΙΣ ΤΟΥΡΙΣΤΩΝ

Οι αφίξεις τουριστών τον Ιανουάριο 2017 ανήλθαν σε 62 611, σε σύγκριση με 87 927 τον Δεκέμβριο 2016, σημειώνοντας μείωση 28,8%. Τον Φεβρουάριο 2017 οι αφίξεις ανήλθαν στις 82 209, σημειώνοντας αύξηση 31,3% σε σύγκριση με τον Ιανουάριο του ίδιου έτους.

Πηγή: Στατιστική Υπηρεσία Κύπρου

Φορητός Ηλεκτρονικός
Υπολογιστής
Μόνο €550*!



* Στην τιμή δεν συμπεριλαμβάνεται Φ.Π.Α. 19%.

ΤΑ ΝΕΑ

Ρεκόρ τουριστικών εσόδων

Κερδισμένη στον τουρισμό το 2016 η Κύπρος, αφού τα τουριστικά έσοδα ανήλθαν στα 2,23 δισ. ευρώ, σημειώνοντας αύξηση 12,7% σε σχέση με το 2015.

Τουριστικά έσοδα 2016

ΕΣΟΔΑ
Σε δισ. ευρώ

ΕΤΗΣΙΑ
ΜΕΤΑΒΟΛΗ
%

12,7%

2,23

ΚΥΠΡΟΣ
ΙΑΝ. - ΟΚΤ.

Κόσμος

Συνολικές μειώσεις της τάξης του 24% στην τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος τους τελευταίους δώδεκα μήνες.

Ένας οικιακός πελάτης με συνολική κατανάλωση 800 kWh που είναι η κατανάλωση διάρκειας δύο μηνών για ένα μέσο νοικοκυριό, θα πληρώσει €114 φέτος τον Απρίλιο, ενώ πέρσι τον Απρίλιο με την ίδια κατανάλωση θα πλήρωνε €150.

Διερεύνηση

Ένα κατάστημα ένδυσης και υπόδησης προσφέρει τα προϊόντα του με έκπτωση.



Να εκφράσετε την έκπτωση στην τιμή των προϊόντων ως ποσοστό. Να περιγράψετε τον τρόπο σκέψης σας.

Νέες Έννοιες

- Ο **Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (Φ.Π.Α.)** είναι ένα ποσοστό που καθορίζεται από τις οικονομικές υπηρεσίες και εισπράττεται από το κράτος. Ο Φ.Π.Α. επιβάλλεται σε κάθε παράδοση αγαθών ή παροχή υπηρεσιών που πραγματοποιείται.
- Στην Κύπρο ο βασικός συντελεστής Φ.Π.Α. για παράδοση αγαθών και παροχή υπηρεσιών είναι 19%. Εξαιρέση αποτελούν ορισμένα αγαθά και υπηρεσίες, στα οποία επιβάλλεται διαφορετικός συντελεστής Φ.Π.Α. Για παράδειγμα:
 - Συντελεστής Φ.Π.Α. 5% επιβάλλεται για τρόφιμα, εφημερίδες, βιβλία, φάρμακα κ.ά.
 - Συντελεστής Φ.Π.Α. 9% επιβάλλεται για υπηρεσίες εστιατορίου, διαμονή σε ξενοδοχεία, μεταφορά επιβατών κ.ά.

Παραδείγματα:

Η τιμή μιας ταξιδιωτικής τσάντας χωρίς Φ.Π.Α. είναι €80. Ο συντελεστής Φ.Π.Α. είναι 19% για το συγκεκριμένο προϊόν.

Άρα, η τιμή πώλησης της τσάντας συμπεριλαμβανομένου του Φ.Π.Α. είναι €95,20 γιατί:

$$19\% \text{ του } 80 : \frac{19}{100} \cdot 80 = \frac{19 \cdot 80}{100 \cdot 1} = \frac{1520}{100} = 15,20$$

$$80 + 15,20 = 95,20$$

Η τιμή μιας πίτσας χωρίς Φ.Π.Α. είναι €9. Ο συντελεστής Φ.Π.Α. είναι 5% για το συγκεκριμένο προϊόν.

Άρα, η τιμή πώλησης της πίτσας συμπεριλαμβανομένου του Φ.Π.Α. είναι €9,45 γιατί:

$$5\% \text{ του } 9 : \frac{5}{100} \cdot 9 = \frac{5 \cdot 9}{100 \cdot 1} = \frac{45}{100} = 0,45$$

$$9 + 0,45 = 9,45$$

Παραδείγματα

1. Το βιβλιοπωλείο «Αλφαβήτα» προσφέρει τα λεξικά με έκπτωση 25%. Ο Νικόλας αγόρασε ένα λεξικό που κόστιζε €32 χωρίς την έκπτωση. Πόσα πλήρωσε;

Λύση:

A' τρόπος

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Υπολογίζουμε το ποσό της έκπτωσης.

$$\frac{1}{\cancel{4}_1} \cdot \overset{8}{\cancel{32}} = 8$$

Στη συνέχεια, αφαιρούμε το ποσό της έκπτωσης από την αρχική τιμή, για να βρούμε την τελική τιμή.

$$32 - 8 = 24$$

B' τρόπος

Εφόσον θα γίνει έκπτωση 25%, η τελική τιμή θα είναι ίση με το 75% της αρχικής τιμής.

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Υπολογίζουμε την τελική τιμή.

$$\frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \overset{8}{\cancel{32}} = 24$$

Ο Νικόλας πλήρωσε €24 για το λεξικό.

2. Η τιμή ενός καναπέ χωρίς Φ.Π.Α. είναι €500. Ποια είναι η τιμή πώλησης μετά την επιβολή Φ.Π.Α. 19%;

Λύση:

A' τρόπος

Υπολογίζουμε τον Φ.Π.Α. (19% του €500).

$$\frac{19}{100} \cdot 500 = 95$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τον Φ.Π.Α. στην αρχική τιμή του καναπέ, για να βρούμε την τιμή πώλησης.

$$500 + 95 = 595$$

B' τρόπος

Αν η τιμή ενός προϊόντος χωρίς Φ.Π.Α. είναι €100, θα προστεθεί Φ.Π.Α. €19. Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή πώλησης του προϊόντος είναι €119.

Άρα,

Αξία προϊόντος (€)	Τιμή πώλησης (€)
100	119
500	x

$$\frac{100}{500} = \frac{119}{x}$$

$$100x = 119 \cdot 500$$

$$100x = 59\,500$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{59\,500}{100}$$

$$x = 595$$

Η τιμή πώλησης του καναπέ είναι €595.

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε στον πίνακα το ποσό έκπτωσης και την τελική τιμή στα αθλητικά είδη ενός καταστήματος στην περίοδο των εκπτώσεων.

Είδος	Αρχική τιμή	Ποσοστό έκπτωσης	Ποσό έκπτωσης	Τελική τιμή
	€32	25%		
	€12	10%		
	€60	20%		
	€44	15%		

2. Να υπολογίσετε την τελική τιμή των προϊόντων, μετά την επιβολή του Φ.Π.Α.

(α)



€

Τιμή χωρίς Φ.Π.Α. 300,00

Φ.Π.Α. (19%) _____

Τιμή με Φ.Π.Α. _____

(β)



€

Τιμή χωρίς Φ.Π.Α. 900,00

Φ.Π.Α. (19%) _____

Τιμή με Φ.Π.Α. _____

(γ)



€

Τιμή χωρίς Φ.Π.Α. 175,00

Φ.Π.Α. (19%) _____

Τιμή με Φ.Π.Α. _____

(δ)



€

Τιμή χωρίς Φ.Π.Α. 140,00

Φ.Π.Α. (5%) _____

Τιμή με Φ.Π.Α. _____

3. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Ο βασικός συντελεστής Φ.Π.Α. στην Κροατία είναι 25%. Ποια είναι η τιμή πώλησης ενός παιχνιδιού, αν η τιμή του χωρίς Φ.Π.Α. είναι €48;
- (β) Μια εταιρεία εμφιαλώνει χυμό λεμονιού σε μπουκάλια χωρητικότητας 500 ml. Η εταιρεία αποφάσισε την κυκλοφορία συλλεκτικών μπουκαλιών με 15% μεγαλύτερη χωρητικότητα. Ποια θα είναι η χωρητικότητα κάθε συλλεκτικού μπουκαλιού;
- (γ) Ο Κυριάκος πήρε αύξηση 10% στον μισθό του τη φετινή χρονιά και τώρα αμείβεται με €1650 τον μήνα. Ποιος ήταν ο μισθός του Κυριάκου την περσινή χρονιά;

4. Να υπολογίσετε το ποσοστό της έκπτωσης σε κάθε προϊόν.

(α)



Αρχική τιμή: €150
Τελική τιμή: €120

(β)



Αρχική τιμή: €260
Τελική τιμή: €234

5. Να αξιολογήσετε την ορθότητα των πιο κάτω δηλώσεων.

- (α) Ο Αντώνης πήρε αύξηση στον μισθό του 30%.
Ο Βασίλης πήρε αύξηση στον μισθό του 25%.
Άρα, ο Αντώνης πήρε τη μεγαλύτερη αύξηση.

- (β) Κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων, οι τιμές ενός καταστήματος μειώθηκαν κατά 25%.
Μετά το τέλος των εκπτώσεων, οι τιμές αυξήθηκαν κατά 25%.
Άρα, επανήλθαν στην τιμή που είχαν πριν τις εκπτώσεις.

6. Η Κατερίνα μελετά τις πιο κάτω πληροφορίες σχετικά με την τιμή ενός προϊόντος.

Τιμή προϊόντος	
Έτος	Τιμή (€)
2008	8,00
2010	10,00
2012	12,00
2014	15,00
2016	16,50



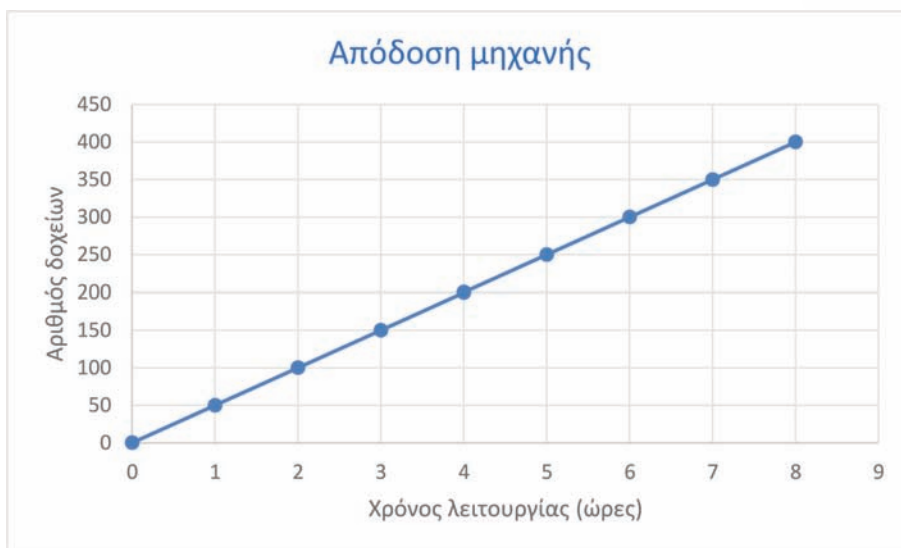
(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Περίοδος	Αύξηση στην τιμή (€)	Ποσοστό αύξησης στην τιμή (%)
2008-2010		
2010-2012		
2012-2014		
2014-2016		

(β) Τι παρατηρείτε;

7. Η τιμή ενός προϊόντος τον Απρίλιο ήταν κατά 10% ψηλότερη σε σχέση με τον Μάρτιο. Τον Μάρτιο, η τιμή του ίδιου προϊόντος ήταν κατά 10% χαμηλότερη σε σχέση με τον Φεβρουάριο. Ποια είναι η τιμή του προϊόντος τον Απρίλιο, αν η τιμή του προϊόντος τον Φεβρουάριο ήταν €40;

Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την απόδοση μιας μηχανής που κατασκευάζει πλαστικά δοχεία.



(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, με βάση τη γραφική παράσταση.

Απόδοση μηχανής								
Χρόνος (ώρες)	1	2	3	4	5	6	7	8
Αριθμός δοχείων	50							
Αριθμός δοχείων Χρόνος	$\frac{50}{1} = 50$							

(β) Ποια σχέση συνδέει τον χρόνο λειτουργίας της μηχανής με τον αριθμό των δοχείων που κατασκευάζει;

(γ) Πόσα δοχεία θα κατασκευάσει συνολικά η μηχανή, αν συνεχίσει τη λειτουργία της για ακόμη μια ώρα; Να επεξηγήσετε.

Νέες Έννοιες

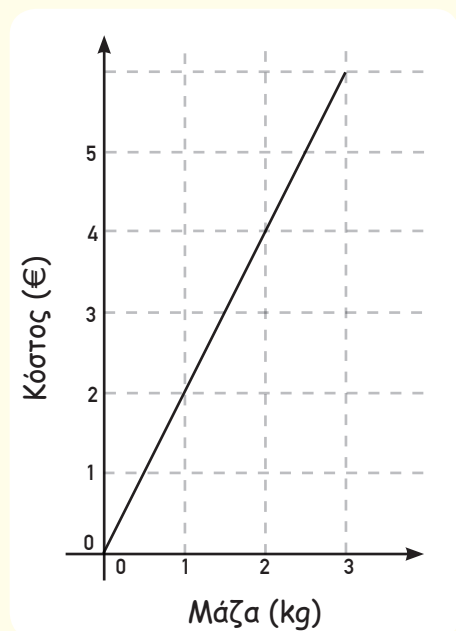
- Δύο ποσά ονομάζονται **ευθέως ανάλογα** ή απλά **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές έχουν πάντα τον ίδιο λόγο.

Δηλαδή, αν τα ποσά α και β είναι ανάλογα, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$, όπου κ σταθερός αριθμός.

Παράδειγμα:

Η τιμή ενός προϊόντος είναι €2 το κιλό.

Κόστος (€)	2	4	6
Μάζα (kg)	1	2	3



$$\frac{\text{Κόστος (€)}}{\text{Μάζα (kg)}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

Τα ποσά **κόστος (€)** και **μάζα (kg)** είναι ευθέως ανάλογα ποσά ή απλά ανάλογα, γιατί οι αντίστοιχες τιμές έχουν πάντα τον ίδιο λόγο. Τα σημεία στη γραφική παράσταση, η οποία παρουσιάζει τις αντίστοιχες τιμές για τα δύο ποσά, σχηματίζουν ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα είναι ανάλογα.

Παρασκευή κρασιού				
Κρασί (L)	3	6	12	18
Σταφύλι (kg)	4	8	16	24

Λύση:

Εξετάζουμε τον λόγο $\frac{\text{ποσότητα κρασιού}}{\text{ποσότητα σταφυλιού}}$.

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{6}{8} = 0,75$$

$$\frac{12}{16} = 0,75$$

$$\frac{18}{24} = 0,75$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{\text{ποσότητα κρασιού}}{\text{ποσότητα σταφυλιού}}$ των αντίστοιχων τιμών είναι σταθερός. Άρα, τα ποσά είναι ανάλογα.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα.

(α)

Τέλη αποστολής δεμάτων εξωτερικού			
Μάζα (kg)	2	3	8
Κόστος (€)	18	21	64

(β)

Χρέωση ενοικίασης θαλάσσιου σκι			
Χρόνος (ώρες)	3	5	7
Κόστος (€)	24	40	56

2. Τα ποσά που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα. Να συμπληρώσετε τα κενά.

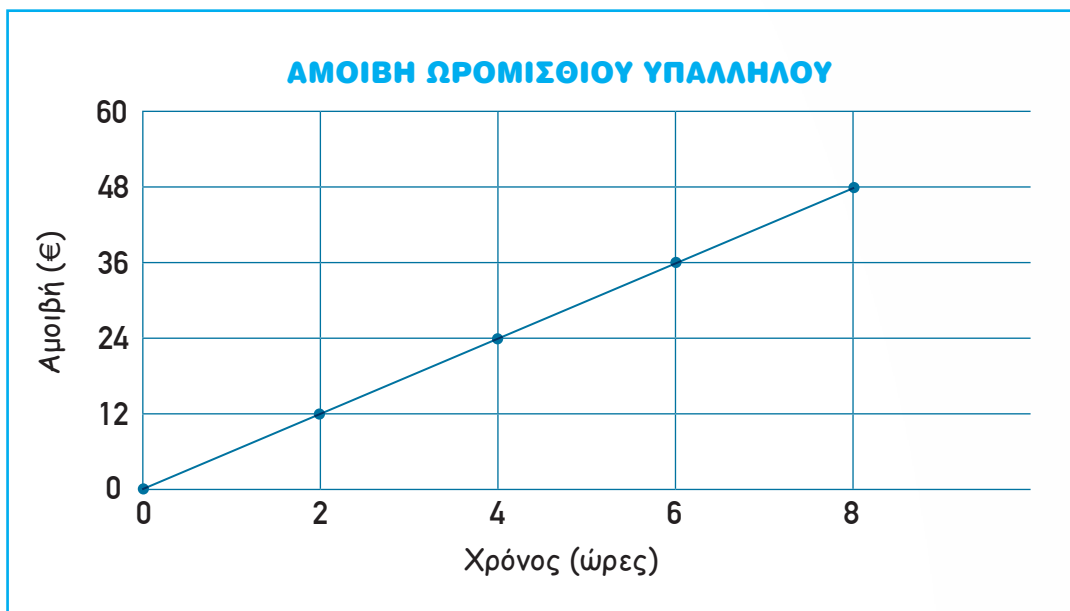
(α)

Χρέωση γραπτών μηνυμάτων από κινητό τηλέφωνο				
Κόστος (σεντ)	10	15	40	
Αριθμός γραπτών μηνυμάτων	2			11

(β)

Απόδοση μηχανής καφέ					
Καφές (φλιτζάνια)		5	7	8	10
Χρόνος (λεπτά)	6		21	24	

3. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την αμοιβή ενός ωρομίσθιου υπαλλήλου.



(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, με βάση τη γραφική παράσταση.

ΑΜΟΙΒΗ ΩΡΟΜΙΣΘΙΟΥ ΥΠΑΛΛΗΛΟΥ								
Χρόνος εργασίας (ώρες)	1	2	3	4	5	6	7	8
Αμοιβή (€)								

(β) Ποια θα είναι η αμοιβή του υπαλλήλου, αν εργαστεί για 10 ώρες;

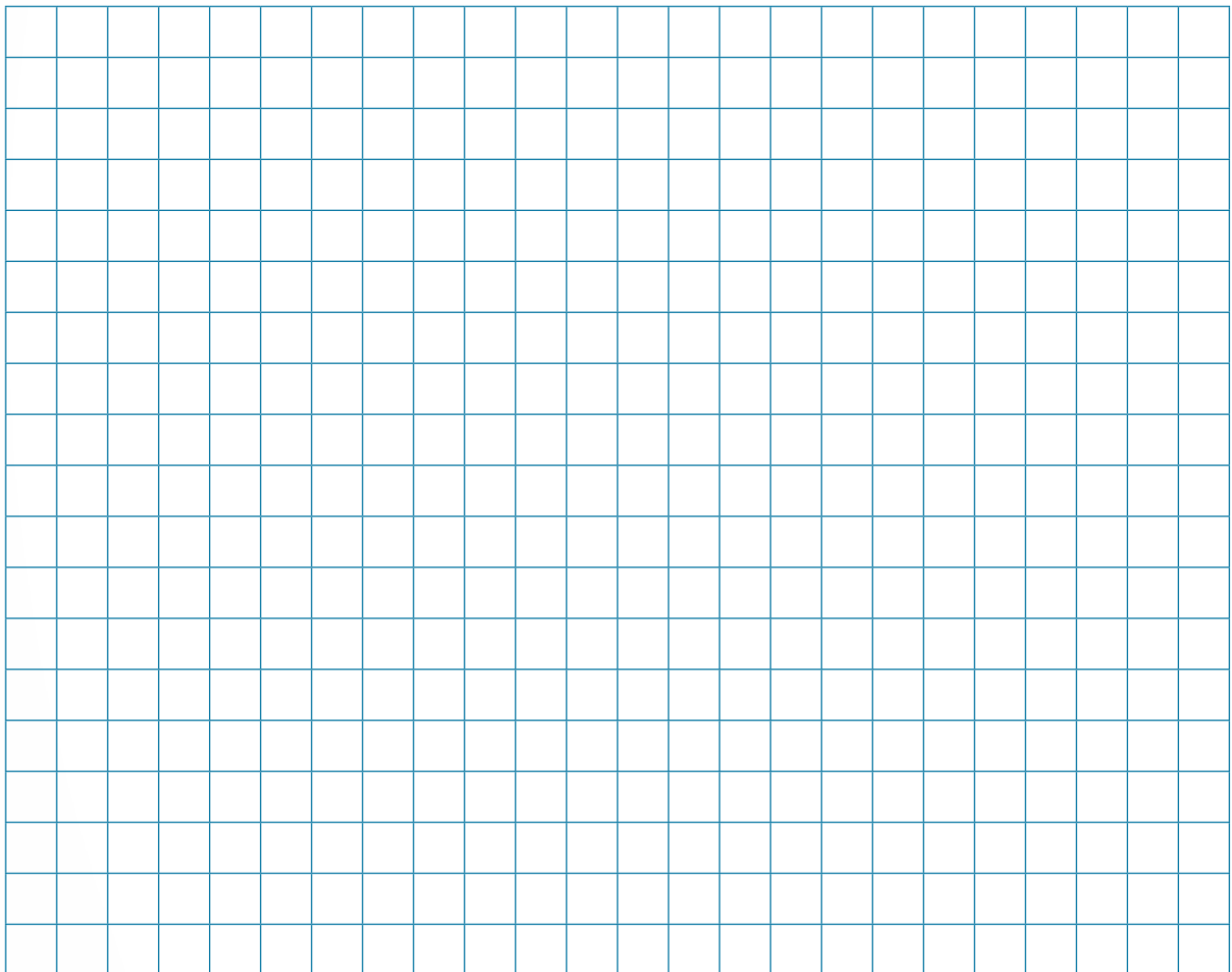
(γ) Πόσες ώρες θα πρέπει να εργαστεί ο υπάλληλος, ώστε η αμοιβή του να είναι €120;

4. Ένα γαλακτοκομείο χρησιμοποιεί 500 L γάλα, για να κατασκευάσει 100 kg τυρί.

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

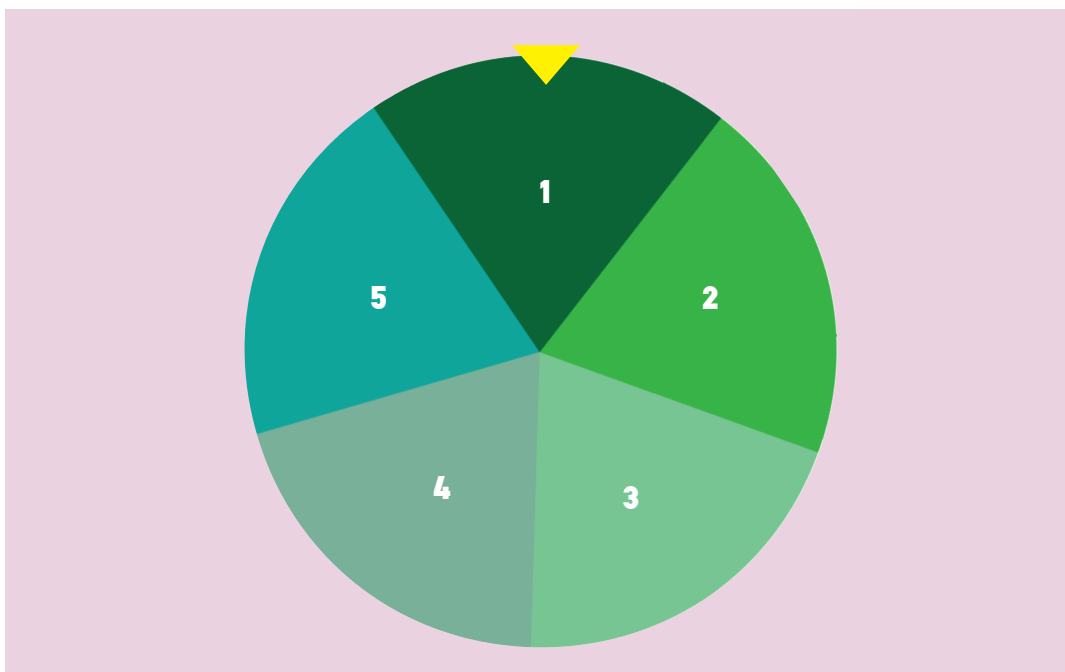
Γάλα (L)	500						
Τυρί (kg)	100	200	300				

(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση, για να παρουσιάσετε την ποσότητα του γάλακτος που απαιτείται για την παραγωγή τυριού μέχρι 1000 kg.





Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι, οι παίκτες παίζουν στον πιο κάτω τροχό της τύχης. Κάθε παίκτης επιλέγει έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 5 και γυρίζει τον τροχό. Αν η ένδειξη του τροχού είναι ο αριθμός που επέλεξε, τότε κερδίζει ένα δώρο.



Τις προηγούμενες τέσσερις φορές, η ένδειξη του τροχού δεν ήταν ο αριθμός 5. Σίγουρα θα κερδίσω, αν επιλέξω τον αριθμό 5.



Γιάννης

Να σχολιάσετε τη σκέψη του Γιάννη.

Διερεύνηση 1

Η Δανάη και η Ευγενία θα παίξουν το πιο κάτω παιχνίδι.

Κανόνες παιχνιδιού

- Κάθε παίκτης θα επιλέξει στην τύχη έναν βόλο από το σακούλι.
- Η Δανάη κερδίζει έναν βαθμό, αν επιλέξει έναν κόκκινο βόλο.
- Η Ευγενία κερδίζει έναν βαθμό, αν επιλέξει έναν μπλε βόλο



(α) Να σχολιάσετε τους κανόνες του παιχνιδιού.

(β) Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να τροποποιηθεί το παιχνίδι, ώστε η Δανάη και η Ευγενία να έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν;

Διερεύνηση 2

Ο Ηλίας ανακάτεψε και τοποθέτησε ανάποδα στο θρανίο του δέκα κάρτες με αριθμούς από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός παρουσιάζεται μόνο μία φορά.

(α) Ο Ηλίας γύρισε την πρώτη κάρτα.

3



Είναι πιο πιθανόν ο αριθμός στην επόμενη κάρτα να είναι μεγαλύτερος από το 3 ή μικρότερος από το 3; Να επεξηγήσετε.

(β) Ο Ηλίας γύρισε και τη δεύτερη κάρτα.

3

10



Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός στην επόμενη κάρτα να είναι μεγαλύτερος από το 10;

(γ) Ο Ηλίας γύρισε και την τρίτη κάρτα.

3

10

4



Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός στην επόμενη κάρτα να είναι μεγαλύτερος από το 4;

(δ) Ο Ηλίας γύρισε τις πρώτες έξι κάρτες.

3

10

4

7

1

6



Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός στην επόμενη κάρτα να είναι μικρότερος από το 6;

Νέες Έννοιες

- Μια διαδικασία, η οποία εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες που δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα της, αλλά ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη που εμφανίζεται.

- Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος**.

Παραδείγματα:

Στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού, υπάρχουν 6 δυνατά αποτελέσματα: 1, 2, 3, 4, 5 ή 6.

Στη ρίψη ενός κέρματος, υπάρχουν 2 δυνατά αποτελέσματα: κορώνα ή γράμματα.

- Το σύνολο που περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δυνατό ενδεχόμενο**.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού, το ενδεχόμενο η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός, περιλαμβάνει τα αποτελέσματα 2, 4 και 6.

- Υπολογισμός πιθανότητας ενός ενδεχομένου σε ένα πείραμα τύχης.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός είναι:

$$P(\text{άρτιος αριθμός}) = \frac{\text{σύνολο άρτιων αριθμών}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

αφού τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι 3 (2, 4 ή 6) και όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι 6 (1, 2, 3, 4, 5 ή 6).

Παράδειγμα

1. Σε ένα σακούλι υπάρχουν 3 πράσινοι, 5 κίτρινοι και 2 γαλάζιοι κύβοι. Ο Νίκος θα επιλέξει στην τύχη έναν κύβο από το σακούλι. Να υπολογίσετε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου.

Λύση:

Το πιο πάνω πείραμα τύχης έχει 10 δυνατά αποτελέσματα ($3 + 5 + 2 = 10$).

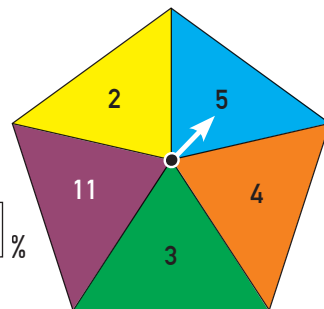
	Ενδεχόμενο	Πιθανότητα
A.	Ο κύβος που θα επιλέξει να είναι πράσινος.	$P(\text{πράσινος κύβος}) = \frac{3}{10} = 30\%$
B.	Ο κύβος που θα επιλέξει να είναι γαλάζιος ή κίτρινος.	$P(\text{γαλάζιος ή κίτρινος κύβος}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 20\%$
Γ.	Ο κύβος που θα επιλέξει να είναι κόκκινος.	$P(\text{κόκκινος κύβος}) = \frac{0}{10} = 0\%$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου.

(α) Η Νίκη γυρίζει το βέλος στον τροχό της τύχης. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει σε άρτιο αριθμό;

$$P(\text{άρτιος αριθμός}) = \frac{\text{σύνολο άρτιων αριθμών}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}\%$$



(β) Ο Φάνης επιλέγει τυχαία έναν βόλο από το σακούλι. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξει πράσινο βόλο;

$$P(\text{πράσινος βόλος}) = \frac{\text{σύνολο πράσινων βόλων}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}\%$$



(γ) Ο Ευάγγελος ρίχνει ένα συνηθισμένο ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα η ένδειξη του ζαριού να είναι αριθμός μικρότερος από το 7;

$$P(\text{αριθμός μικρότερος από το 7}) = \frac{\text{σύνολο αριθμών μικρότερων από το 7}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}\%$$



2. Η Λίζα έχει ένα κουτί που περιέχει κάρτες με αριθμούς από το 1 μέχρι το 10. Κάθε αριθμός παρουσιάζεται μόνο μία φορά. Θα επιλέξει στην τύχη μια κάρτα από το κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου.

	Ενδεχόμενο	Πιθανότητα
A.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι το 7.	
B.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι το 15.	
Γ.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι μεγαλύτερος από το 1.	
Δ.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι περιττός.	
Ε.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι μεγαλύτερος του 6.	
ΣΤ.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι μεταξύ του 0 και του 11.	
Ζ.	Ο αριθμός στην κάρτα να είναι πολλαπλάσιο του 2.	

3. Η Μυρτώ θα επιλέξει στην τύχη έναν κύβο από το διπλανό σακούλι. Να προσθέσετε ή να αφαιρέσετε κύβους στο σακούλι, ώστε:



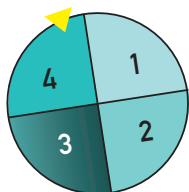
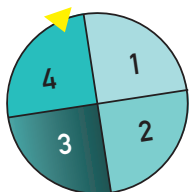
- (α) η πιθανότητα επιλογής κόκκινου κύβου να είναι $\frac{1}{3}$

- (β) η πιθανότητα επιλογής μαύρου κύβου να είναι 10%

4. Τα παιδιά στην τάξη της κυρίας Χάρις θα παίξουν τόμπολα, με βάση τις πιο κάτω οδηγίες.



- Θα γυρίσω τους δύο τροχούς της τύχης και θα προσθέσω τις δύο ενδείξεις.
- Αν έχετε στην κάρτα σας το άθροισμα αυτό, να το διαγράψετε.
- Ο πρώτος μαθητής που θα διαγράψει όλους τους αριθμούς στην κάρτα του κερδίζει το παιχνίδι.



Ποια από τις πιο κάτω κάρτες δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα σε ένα μαθητή να κερδίσει; Να εξηγήσετε.

Κάρτα Α

2	3	7
1	5	8

Κάρτα Β

5	6	3
7	4	8

Κάρτα Γ

2	7	4
8	3	6

Δραστηριότητες ενότητας

1. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Η Φανή ετοιμάζει μαρμελάδα βερίκοκο, χρησιμοποιώντας 3 kg ζάχαρη για κάθε 4 kg βερίκοκα. Πόσα κιλά ζάχαρη θα χρειαστεί, αν θα χρησιμοποιήσει 12 kg βερίκοκα;
- (β) Στον χώρο στάθμευσης μιας εταιρείας ο λόγος των εμπορικών αυτοκινήτων προς τα επιβατικά αυτοκίνητα είναι 2:5. Πόσα επιβατικά αυτοκίνητα υπάρχουν, αν τα εμπορικά αυτοκίνητα είναι 8;
- (γ) Ο Σωκράτης ετοιμάζει γαλάζια μπογιά, χρησιμοποιώντας μπλε και άσπρη μπογιά σε αναλογία 2:3. Πόσα λίτρα μπογιάς χρειάζεται από το κάθε χρώμα για την ετοιμασία 30 L γαλάζιας μπογιάς;
- (δ) Ο Νικόλας και η Βασιλική αγόρασαν μολύβια της ίδιας ποιότητας από ένα κατάστημα. Η Βασιλική πλήρωσε €3,48 για 6 μολύβια. Πόσα πλήρωσε ο Νικόλας για 4 μολύβια;
- (ε) Ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο σπιτιού κατασκευάστηκε με κλίμακα 1:50. Να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις ενός ορθογώνιου δωματίου, αν στο σχέδιο έχει μήκος 10 cm και πλάτος 6 cm.
- (στ) Ένας κηπουρός χρειάζεται 12 kg σπόρους, για να καλύψει με γρασίδι μια έκταση 100 m². Να υπολογίσετε την ποσότητα σπόρων που χρειάζεται, για να καλύψει με γρασίδι έναν τετράγωνο χώρο με μήκος πλευράς 50 m.

2. Να ελέγξετε κατά πόσο οι δύο λόγοι σχηματίζουν αναλογία.

(α) $\frac{6}{9}$ και $\frac{8}{12}$

(β) $\frac{2}{25}$ και $\frac{3}{35}$

(γ) $\frac{9}{12}$ και $\frac{15}{20}$

(δ) $\frac{8}{10}$ και $\frac{12}{15}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του v στις πιο κάτω αναλογίες.

(α) $\frac{6}{8} = \frac{v}{100}$

(β) $\frac{2}{16} = \frac{5}{v}$

(γ) $\frac{4}{9} = \frac{12}{v}$

(δ) $\frac{v}{20} = \frac{6}{15}$

(ε) $\frac{14}{20} = \frac{v}{30}$

4. Να συμπληρώσετε.

(α)

Το 50% του 24 είναι _____

Άρα,

Το 25% του 24 είναι _____

Το 75% του 24 είναι _____

(β)

Το 10% του 40 είναι _____

Άρα,

Το 20% του 40 είναι _____

Το 5% του 40 είναι _____

(γ)

Το 10% του 120 είναι _____

Άρα,

Το 5% του 120 είναι _____

Το 60% του 120 είναι _____

(δ)

Το 25% του 48 είναι _____

Άρα,

Το 75% του 48 είναι _____

Το 12,5% του 48 είναι _____

5. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω.

- (α) Ποιος αριθμός είναι το 35% του 40; (β) Ποιου αριθμού το 30% είναι το 18;
(γ) Τι ποσοστό του 48 είναι το 12; (δ) Τι ποσοστό του 30 είναι το 6;
(ε) Ποιου αριθμού το 75% είναι το 90; (στ) Τι ποσοστό του 75 είναι το 24;
(ζ) Ποιος αριθμός είναι το 15% του 140; (η) Ποιου αριθμού το 40% είναι το 16;

6. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Η εφηβική ομάδα καλαθόσφαιρας ενός δήμου νίκησε στο 75% των παιχνιδιών που συμμετείχε μέχρι τώρα. Σε πόσα παιχνίδια συμμετείχε η ομάδα, αν οι νίκες της είναι 12;
- (β) Η Ιωάννα έστειλε ταχυδρομικώς 320 ερωτηματολόγια για μια έρευνα. Επιστράφηκαν 240 συμπληρωμένα ερωτηματολόγια. Ποιο είναι το ποσοστό των ερωτηματολογίων που επιστράφηκαν συμπληρωμένα;
- (γ) Ο κύριος Δημοσθένης ετοίμασε ένα δοκίμιο, το οποίο περιλάμβανε 40 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Το 30% των ερωτήσεων είχε ως ορθή απάντηση την επιλογή «Β». Πόσες από τις ερωτήσεις του δοκιμίου δεν είχαν ως ορθή απάντηση την επιλογή «Β»;

7. Δύο καταστήματα οικιακών συσκευών προσφέρουν τα προϊόντα τους με έκπτωση. Ο πίνακας παρουσιάζει πληροφορίες για 4 πανομοιότυπες συσκευές που πωλούνται στα δύο καταστήματα. Ποιο κατάστημα προσφέρει τη χαμηλότερη τιμή για κάθε συσκευή; Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

Συσκευή	Κατάστημα «Ηλέκτρα»		Κατάστημα «Ιφιγένεια»	
	Αρχική τιμή	Έκπτωση	Αρχική τιμή	Έκπτωση
Καφετιέρα	€45,00	20%	€43,50	€5,00
Βραστήρας	€32,00	25%	€29,95	€4,00
Αποχυμωτής	€60,00	15%	€58,75	€4,00
Ζυγαριά κουζίνας	€20,00	10%	€19,00	€2,50

8. Να συμπληρώσετε στον πίνακα το ποσό του Φ.Π.Α. και την τελική τιμή των προϊόντων και των υπηρεσιών.

Προϊόν ή Υπηρεσία	Τιμή χωρίς Φ.Π.Α.	Ποσοστό Φ.Π.Α.	Ποσό Φ.Π.Α.	Τελική τιμή
Βιβλίο	€12,00	5%		
Τρόφιμα	€4,80	5%		
Κόμιστρο ταξί	€7,00	9%		
Παπούτσια	€50,00	19%		

9. Να υπολογίσετε το ποσοστό της έκπτωσης σε κάθε προϊόν.

(α)



Αρχική τιμή: €450
Τελική τιμή: €405

(β)



Αρχική τιμή: €280
Τελική τιμή: €224

(γ)



Αρχική τιμή: €240
Τελική τιμή: €204

10. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα.

(α)

Αγορά βιβλίων			
Κόστος (€)	3	4	6
Αριθμός βιβλίων	27	36	63

(β)

Προπόνηση στο τρέξιμο			
Απόσταση (m)	800	600	1200
Χρόνος (λεπτά)	4	5	8

(γ)

Ετοιμασία ρυζιού			
Ρύζι (φλιτζάνια)	2	3	5
Νερό (φλιτζάνια)	5	7,5	12,5

11. Τα ποσά που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα. Να συμπληρώσετε τα κενά.

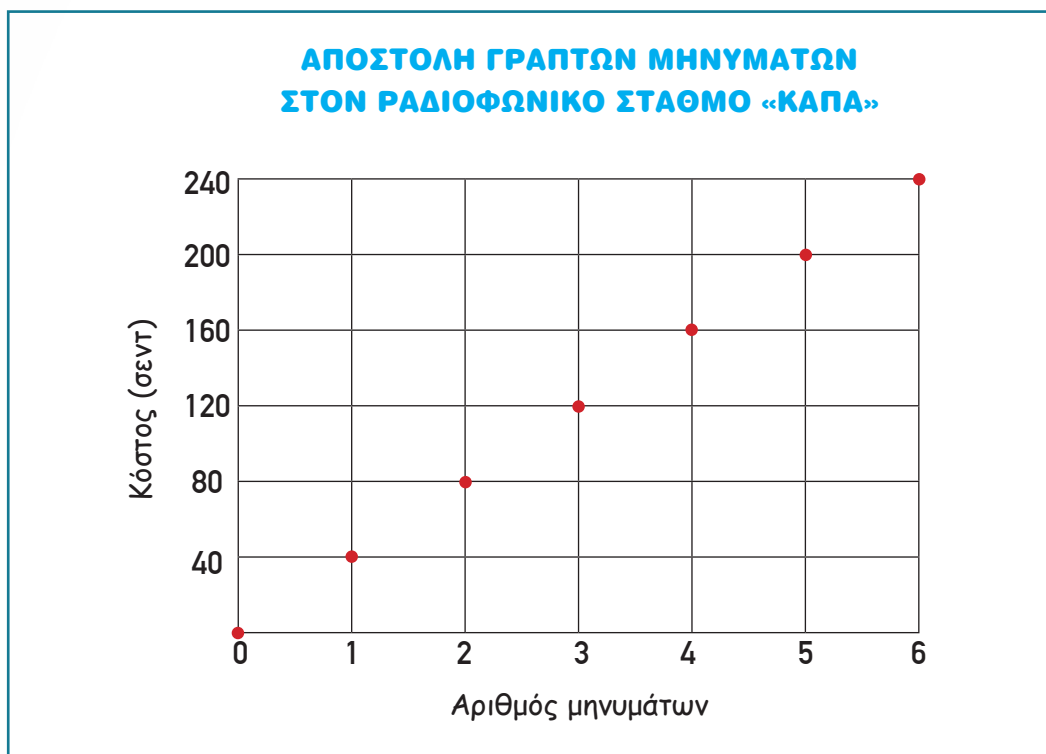
(α)

Αξία υφάσματος				
Μήκος υφάσματος (m)	3		9	4
Κόστος (€)		25		20

(β)

Παραγωγή χυμού σταφυλιού				
Μάζα σταφυλιών (kg)		4	7	
Χυμός σταφυλιού (L)	8	2		5,5

12. Η γραφική παράσταση παρουσιάζει το κόστος της αποστολής γραπτών μηνυμάτων προς έναν ραδιοφωνικό σταθμό.



(α) Ποιο είναι το κόστος για την αποστολή 8 γραπτών μηνυμάτων προς τον ραδιοφωνικό σταθμό;

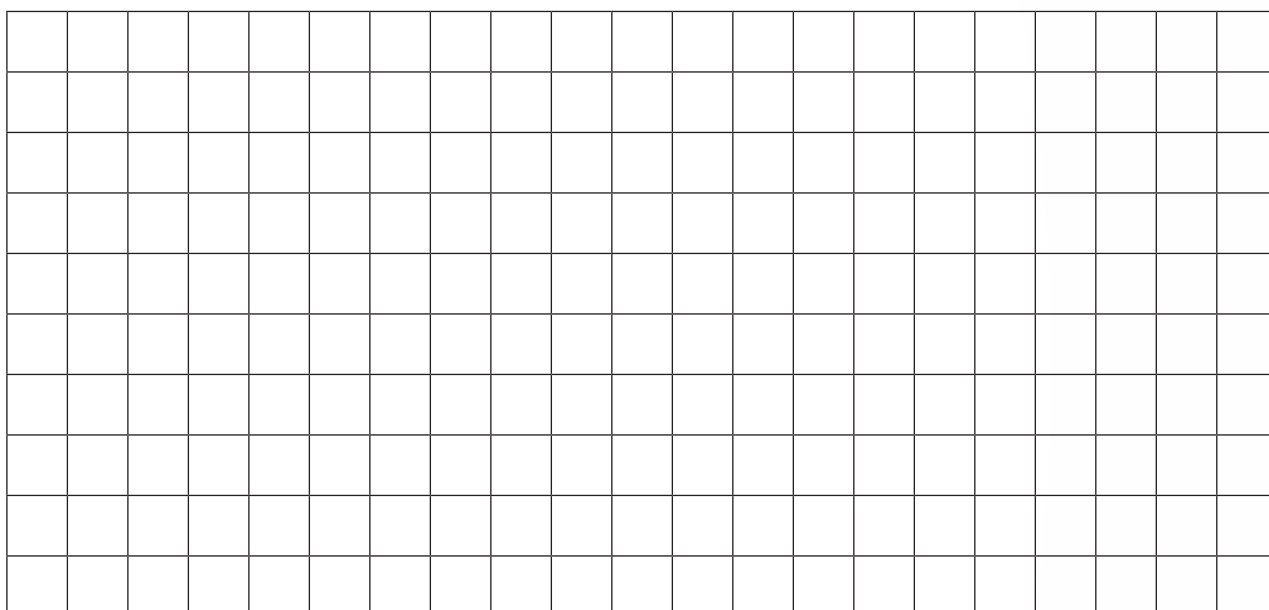
(β) Ένας ακροατής πλήρωσε €8 σε έναν μήνα για την αποστολή γραπτών μηνυμάτων προς τον ραδιοφωνικό σταθμό. Πόσα μηνύματα έστειλε;

13. Η τιμή των πορτοκαλιών στην υπεραγορά «Αφροδίτη» την περασμένη Τετάρτη ήταν 75 σεντ το κιλό.

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Μάζα πορτοκαλιών (kg)	1	2	3	4	5	6
Κόστος (€)						

(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση, για να παρουσιάσετε το κόστος αγοράς πορτοκαλιών με μάζα μέχρι 6 kg.



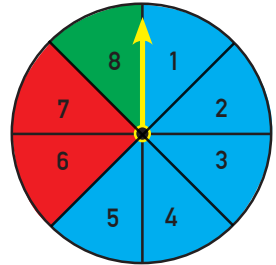
(γ) Η κυρία Σοφία αγόρασε από την υπεραγορά 9 kg πορτοκάλια. Πόσα πλήρωσε;

(δ) Πόσα κιλά πορτοκάλια αγόρασε ο κύριος Πέτρος, αν πλήρωσε €12;

14. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να συμβούν τα πιο κάτω ενδεχόμενα.

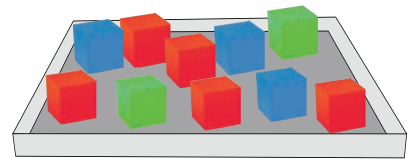
(α) Η Νικολέττα γυρίζει το βέλος στον τροχό της τύχης. Ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να σταματήσει σε περιττό αριθμό;

$$P(\text{περιττός αριθμός}) = \frac{\text{σύνολο περιττών αριθμών}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$



(β) Ο Σάββας επιλέγει τυχαία έναν κύβο από ένα κουτί που περιέχει συνολικά 10 κύβους. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξει έναν πράσινο κύβο;

$$P(\text{πράσινος κύβος}) = \frac{\text{σύνολο πράσινων κύβων}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$



(γ) Ο Φώτης επιλέγει τυχαία έναν βόλο από το σακούλι. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξει κόκκινο βόλο;

$$P(\text{κόκκινος βόλος}) = \frac{\text{σύνολο κόκκινων βόλων}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$



(δ) Ο Χάρης ρίχνει ένα συνηθισμένο ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα η ένδειξη του ζαριού να είναι πρώτος αριθμός;

$$P(\text{πρώτος αριθμός}) = \frac{\text{σύνολο πρώτων αριθμών}}{\text{σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} \%$$



15. Ο πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των μουσικών που είναι μέλη μιας ορχήστρας.

Μουσικό όργανο	Αριθμός μουσικών
Έγχορδο	30
Ξύλινο πνευστό	7
Χάλκινο πνευστό	10
Κρουστό	3

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους μουσικούς της ορχήστρας.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ο μουσικός να παίζει κρουστό όργανο;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα ο μουσικός να παίζει πνευστό όργανο;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο μουσικός να μην παίζει έγχορδο όργανο;

Δραστηριότητες εμπλουτισμού

1. Ο πίνακας παρουσιάζει πληροφορίες για την τιμή πώλησης διάφορων ξηρών καρπών.

Τιμή ξηρών καρπών

Είδος	Μάζα	Τιμή
Αμύγδαλα	250 g	€4,20
Καρύδια	200 g	€4,80
Φιστίκια	1000 g	€8,80
Φουντούκια	500 g	€9,00

Να βάλετε σε σειρά τους ξηρούς καρπούς, αρχίζοντας από το είδος με τη χαμηλότερη τιμή ανά κιλό.

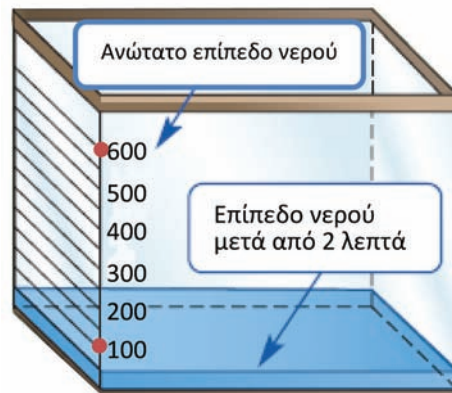
2. Ο πίνακας παρουσιάζει το μήκος της σκιάς τριών θάμνων διαφορετικού ύψους στις 10:00 π.μ.

Ύψος θάμνου (cm)	Μήκος σκιάς (cm)
20	16
40	32
60	48

(α) Ποιο θα είναι στις 10:00 π.μ. το μήκος της σκιάς ενός θάμνου που έχει ύψος 50 cm;

(β) Ποιο είναι το ύψος ενός θάμνου που η σκιά του είχε μήκος 56 cm στις 10:00 π.μ.;

3. Στο πιο κάτω ενυδρείο, με μέγιστη χωρητικότητα 600 L, διοχετεύεται νερό με σταθερό ρυθμό. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις, με βάση το διάγραμμα.



α) Πόση ποσότητα νερού διοχετεύεται στο ενυδρείο κάθε λεπτό;

(β) Σε ποιο επίπεδο θα φτάσει το νερό στο ενυδρείο, αν διοχετεύεται νερό για 10 λεπτά;

(γ) Πόσος χρόνος χρειάζεται, για να γεμίσει το ενυδρείο με νερό;

4. Η Βασιλική συγκρίνει διαφορετικούς λαμπτήρες σε σχέση με την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας. Να σημειώσετε με ✓ τις ορθές προτάσεις.

Τιμή ξηρών καρπών

Λαμπτήρας	Κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας (watt)	Χρόνος (ώρες)
A	72	2
B	60	4
Γ	80	8
Δ	90	6

A. Οι λαμπτήρες B και Δ έχουν την ίδια κατανάλωση ενέργειας.

B. Ο λαμπτήρας A καταναλώνει λιγότερη ενέργεια σε μια ώρα από τον λαμπτήρα Δ.

Γ. Ο λαμπτήρας Γ έχει τη χαμηλότερη κατανάλωση ενέργειας.

5. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 48 και ο λόγος τους είναι 7:5. Ποιοι είναι οι δύο αριθμοί;

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του a και του β η αναλογία $\frac{a}{15} = \frac{5}{\beta}$ είναι ορθή.

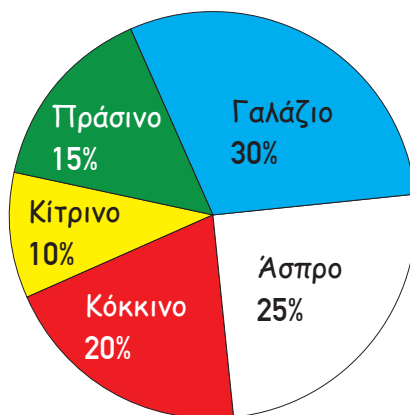
7. Να υπολογίσετε την τιμή του v σε κάθε περίπτωση.

(α) $\frac{2}{v+2} = \frac{18}{27}$

(β) $\frac{v+1}{10} = \frac{4}{8}$

(γ) $\frac{v}{20} = \frac{5}{v}$

8. Στην αποθήκη ενός καταστήματος αθλητικών ειδών υπήρχαν στο τέλος του χρόνου 300 καπέλα. Η κυκλική γραφική παράσταση παρουσιάζει τα χρώματα των διαθέσιμων καπέλων.



(α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των καπέλων που είναι άσπρα.

(β) Να βρείτε σε ποιους χρωματισμούς τα διαθέσιμα καπέλα είναι λιγότερα από 50.

9. Να υπολογίσετε την άγνωστη ποσότητα σε κάθε περίπτωση. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) 25% του κιλού

(β) 10% του λίτρου

(γ) 75% της ώρας

(δ) 15% των €1000

(ε) 50% του χιλιομέτρου

(στ) 32,5% του μέτρου

(ζ) 25% του εικοσιτετραώρου

(η) 20% των 2 κιλών

10. Μετά το δείπνο σε ένα εστιατόριο, ο Στέφανος άφησε €3 για φιλοδώρημα. Τι ποσοστό του λογαριασμού ήταν το φιλοδώρημα που άφησε ο Στέφανος, σύμφωνα με την απόδειξη από το εστιατόριο;

Εστιατόριο Μεσόγειος

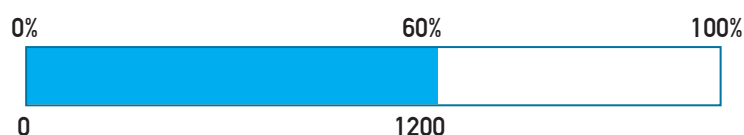
Σαλάτα 5,75

Ριζότο 8,50

Κοτόπουλο 10,75

Σύνολο

11. Μια φιλοζωική οργάνωση έθεσε ως στόχο να συγκεντρώσει ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων για ένα καταφύγιο ζώων. Το διάγραμμα παρουσιάζει τα χρήματα που συγκεντρώθηκαν μέχρι τώρα.

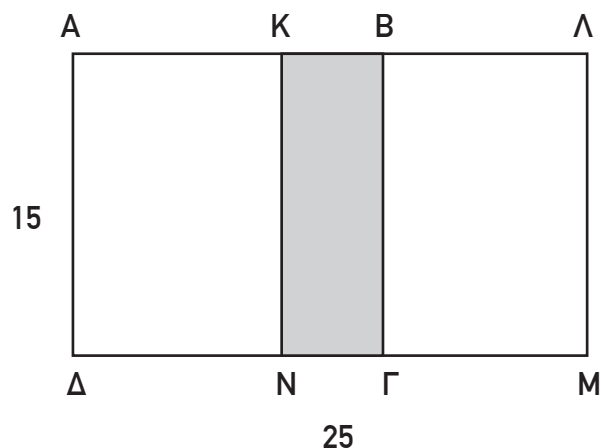


Να υπολογίσετε πόσα χρήματα θα πρέπει να συγκεντρωθούν ακόμη, ώστε να συγκεντρωθεί το 100% του ποσού.

12. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Σε μια παιδική χορωδία, στην οποία συμμετείχαν πέρσι 40 παιδιά, το 60% των παιδιών ήταν κορίτσια. Κατά τη φετινή χρονιά προστέθηκαν στη χορωδία 10 αγόρια. Πόσο είναι φέτος το ποσοστό των κοριτσιών στη χορωδία;
- (β) Σε ένα σχολείο, 120 παιδιά, δηλαδή το 60% των μαθητών, πηγαίνουν στο σχολείο με το λεωφορείο. Μόνο το 12% των μαθητών πηγαίνουν στο σχολείο με το αυτοκίνητο, ενώ οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Πόσα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια;
- (γ) Ένα δοκίμιο περιλαμβάνει 30 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και 15 ερωτήσεις συμπλήρωσης. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με μια μονάδα. Η Αλίκη απάντησε ορθά στο 80% των ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής και σε 12 ερωτήσεις συμπλήρωσης. Τι ποσοστό των ερωτήσεων του δοκιμίου απάντησε ορθά η Αλίκη;

13. Η Αντωνία κατασκεύασε 2 ίδια τετράγωνα, το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τετράγωνο ΚΛΜΝ, που έχουν πλευρά μήκους 15 cm. Τοποθέτησε το ένα τετράγωνο πάνω από το άλλο, ώστε να κατασκευάσει το ορθογώνιο ΑΛΜΔ με διαστάσεις 15 cm και 25 cm. Να υπολογίσετε το ποσοστό της επιφάνειας του ορθογωνίου ΑΛΜΔ που είναι σκιασμένο.



14. Ο Γιάννης αγόρασε από ένα κατάστημα δύο σακάκια με βάση την πιο κάτω προσφορά. Η αρχική τιμή για το ένα σακάκι ήταν €108 και για το άλλο σακάκι €72.

Αγοράστε ένα σακάκι και πάρτε
το δεύτερο* στη μισή τιμή!

**ίσης ή μικρότερης αξίας*



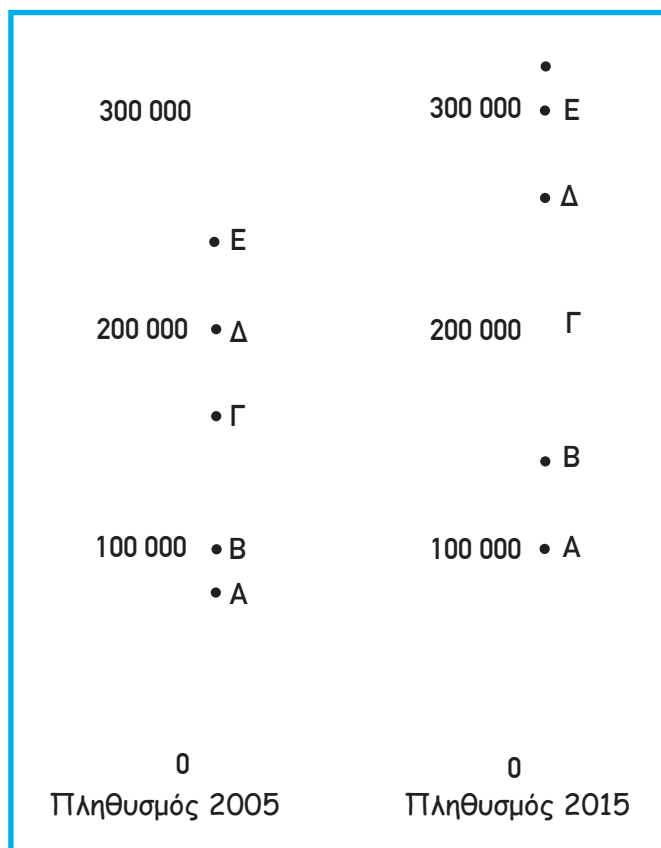
- (α) Πόσα πλήρωσε ο Γιάννης στο ταμείο;

- (β) Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης που επωφελήθηκε ο Γιάννης, αγοράζοντας τα δύο σακάκια;

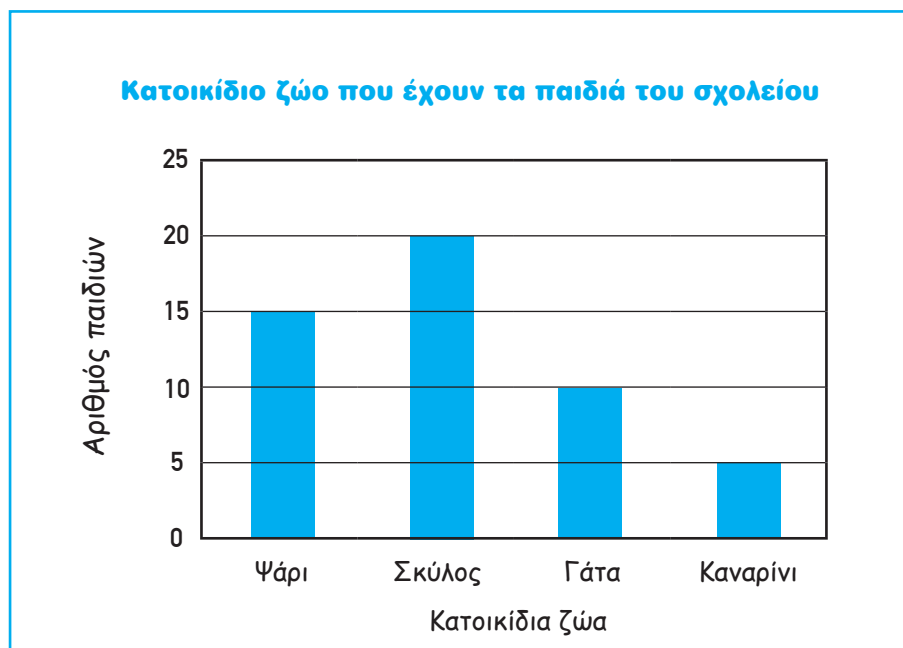
15. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Η εταιρεία «Ήφαιστος» αγόρασε εμπορεύματα, των οποίων η τιμή είναι €357, συμπεριλαμβανομένου Φ.Π.Α. 19%. Να υπολογίσετε την τιμή των εμπορευμάτων πριν την επιβολή Φ.Π.Α.
- (β) Ο Μάρκος κατασκεύασε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με μήκος 8α και πλάτος 4α. Ο Ηλίας κατασκεύασε το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' με διαστάσεις ίσες με το 75% των διαστάσεων του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Να υπολογίσετε το ποσοστό μείωσης της περιμέτρου του αρχικού ορθογωνίου.
- (γ) Σε ένα βραχιόλι υπάρχουν 49 λευκές χάντρες και μια γαλάζια χάντρα. Πόσες χάντρες πρέπει να αφαιρεθούν, ώστε το 90% των χαντρών να είναι λευκές;

16. Το διάγραμμα παρουσιάζει τον πληθυσμό πέντε κοινοτήτων (Α, Β, Γ, Δ και Ε) το 2005 και το 2015. Σε ποια από τις κοινότητες παρουσιάστηκε το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης του πληθυσμού κατά την περίοδο 2005-2015;



17. Το πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας για τα κατοικίδια ζώα που έχουν τα παιδιά ενός σχολείου.



(α) Πόσα παιδιά έλαβαν μέρος στην έρευνα;

(β) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παιδιά που έλαβαν μέρος στην έρευνα.

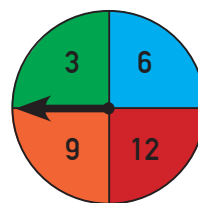
Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

(ii) να έχει σκύλο ως κατοικίδιο ζώο

(iii) να έχει τετράποδο ως κατοικίδιο ζώο

18. Ο Άρης γυρίζει το βέλος στον πιο κάτω τροχό της τύχης.

Ποιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα πραγματοποίησης:



(α) 100%;

(β) $\frac{1}{4}$;

(γ) 0,5;

(δ) 75%;

19. Σε ένα κουτί υπάρχουν 8 κάρτες. Σε κάθε κάρτα είναι γραμμένος ένας διαφορετικός διψήφιος αριθμός μικρότερος από το 30. Ο Γιάννης επιλέγει στην τύχη μια κάρτα από το κουτί.

(α) Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες, για να βρείτε τον αριθμό που είναι γραμμένος σε κάθε κάρτα.

Η πιθανότητα να επιλέξει μια κάρτα με αριθμό που έχει 2 ίδια ψηφία είναι 1: 4.

Η πιθανότητα να επιλέξει μια κάρτα με αριθμό που είναι πολλαπλάσιο του 5 είναι 50%.

Η πιθανότητα να επιλέξει μια κάρτα με πρώτο αριθμό μεγαλύτερο από το 20 είναι 0,25.

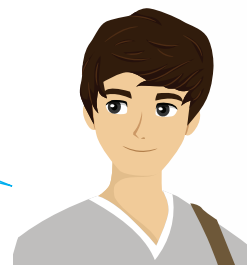
--	--	--	--	--	--	--	--

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Γιάννης να επιλέξει μια κάρτα με αριθμό μικρότερο από το 20.

--

20. Ο Στέφανος έχει ένα σακούλι με βόλους. Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες, για να βρείτε το χρώμα και τον αριθμό των βόλων που υπάρχουν στο σακούλι.

Αν επιλέξω στην τύχη έναν βόλο από το σακούλι, η πιθανότητα να επιλεγεί γαλάζιος βόλος είναι 25%.
Αν αφαιρέσω 6 πράσινους βόλους από το σακούλι, η πιθανότητα να επιλέξω στην τύχη έναν γαλάζιο βόλο είναι 100%.



--



ΕΝΟΤΗΤΑ 12



Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε:

- Να ορίζουμε και να κατασκευάζουμε τον κύκλο και τα στοιχεία του.
- Να επιλύουμε προβλήματα που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου και μήκους κύκλου.
- Να υπολογίζουμε το μήκος κύκλου και την περίμετρο μικτόγραμμων σχημάτων.
- Να ορίζουμε και να περιγράφουμε μετασχηματισμούς, όπως η παράλληλη μεταφορά, η περιστροφή ως προς σημείο και η συμμετρία ως προς άξονα.
- Να αναγνωρίζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου και του κώνου.
- Να υπολογίζουμε τον όγκο ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

Έχουμε μάθει:

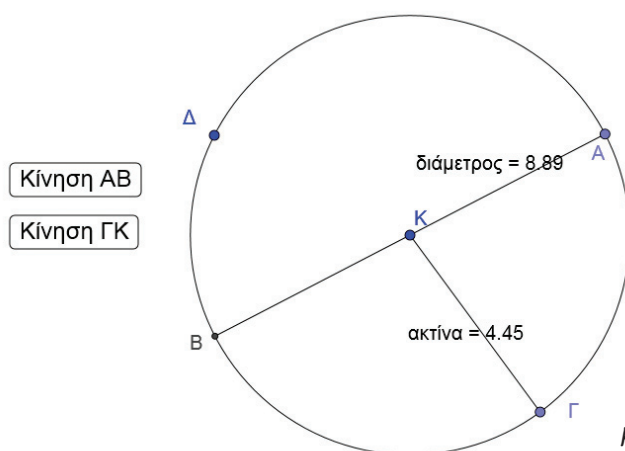
- Να υπολογίζουμε την περίμετρο και το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων (ορθογωνίου, τετραγώνου, τριγώνου, παραλληλογράμμου).
- Να αναγνωρίζουμε στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους.
- Να συσχετίζουμε τα τρισδιάστατα σχήματα με τις δισδιάστατες αναπαραστάσεις τους.

Μια ομάδα τουριστών θα επισκεφθεί τα μνημεία και τα μουσεία της Λευκωσίας που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από 0,5 km από την Οικία Χατζηγεωργάκη Κορνέσιου.

Τοια μνημεία και μουσεία θα επισκεφθούν οι τουρίστες; Να επεξηγήσετε τον τρόπο εργασίας σας.



Το σημείο K είναι το **κέντρο** του κύκλου της πιο κάτω εικόνας. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Gamma$ ονομάζεται **ακτίνα** του κύκλου. Το ευθύγραμμο τμήμα AB ονομάζεται **διάμετρος** του κύκλου.



<https://www.geogebra.org/m/TuhXwzbc>

- (α) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να σύρετε το σημείο Γ στον κύκλο. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της ακτίνας $K\Gamma$ του κύκλου;
- (β) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να σύρετε το σημείο A στον κύκλο. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της διαμέτρου AB του κύκλου;
- (γ) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου. Να συμπληρώσετε την πρώτη γραμμή του πίνακα. Να επαναλάβετε τη διαδικασία για ακόμη 3 κύκλους.

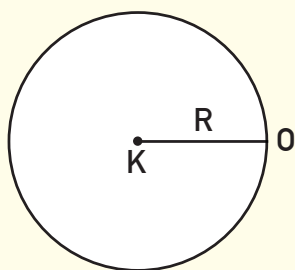
Κύκλος	Ακτίνα	Διάμετρος	$\frac{\text{Διάμετρος}}{\text{Ακτίνα}}$
A			
B			
Γ			
Δ			

Τι παρατηρείτε για τον λόγο της διαμέτρου προς την ακτίνα;

Νέες Έννοιες

- **Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου.

Παράδειγμα:



Το σημείο K είναι το κέντρο του κύκλου.

Το ευθύγραμμο τμήμα KO είναι ακτίνα του κύκλου.

- Δύο κύκλοι με την ίδια ακτίνα είναι ίσοι.
- **Διάμετρος κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του πάνω στον κύκλο και περνά από το κέντρο του κύκλου.

Παράδειγμα:



Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

- Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου.

Νέες Έννοιες

- Κάθε διάμετρος του κύκλου έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα (R) του κύκλου.

Παράδειγμα:

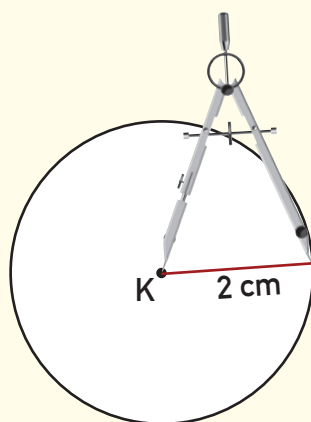


$$\Gamma\Delta = K\Gamma + K\Delta = 2R$$

- Ένα όργανο που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του κύκλου είναι ο **διαβήτης**.

Παράδειγμα:

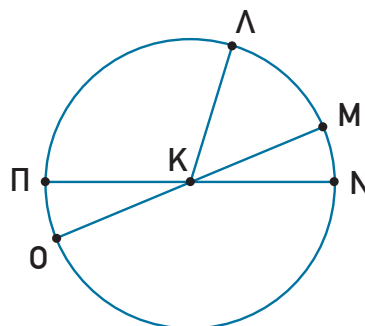
- Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο με ακτίνα 2 cm και κέντρο K, τοποθετούμε σημείο K που θα είναι το κέντρο του κύκλου.
- Ανοίγουμε τον διαβήτη, ώστε τα άκρα του να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2 cm.
- Τοποθετούμε το μεταλλικό άκρο του διαβήτη σταθερά στο σημείο K και το άλλο άκρο του διαβήτη στο χαρτί.
- Περιστρέφουμε τον διαβήτη μια ολόκληρη στροφή στο επίπεδο και το σχήμα που δημιουργείται είναι ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα 2 cm.



Παραδείγματα

1. Να ονομάσετε τα πιο κάτω στοιχεία του κύκλου:

- (α) σημείο Κ
- (β) ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ
- (γ) ευθύγραμμο τμήμα ΠΝ
- (δ) ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ



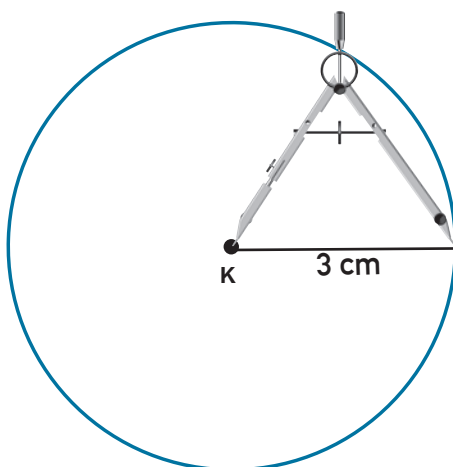
Λύση:

- (α) Το σημείο Κ είναι το κέντρο του κύκλου.
- (β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ είναι ακτίνα του κύκλου.
- (γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΠΝ είναι διάμετρος του κύκλου.
- (δ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ είναι ακτίνα του κύκλου.

2. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο με διάμετρο 6 cm.

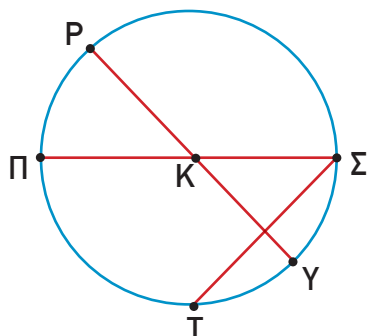
Λύση:

Το μήκος της ακτίνας είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του μήκους της διαμέτρου ενός κύκλου. Άρα, ανοίγουμε τον διαβήτη ώστε τα άκρα του να απέχουν μεταξύ τους 3 cm.



Δραστηριότητες

1. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση.



(α) Ποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα είναι διάμετρος του κύκλου;

Α. ΠΣ

Β. ΚΡ

Γ. ΤΣ

Δ. ΚΠ

(β) Ποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακτίνα του κύκλου;

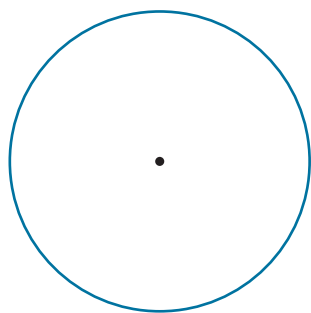
Α. ΠΣ

Β. ΡΥ

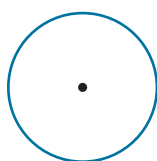
Γ. ΤΣ

Δ. ΚΠ

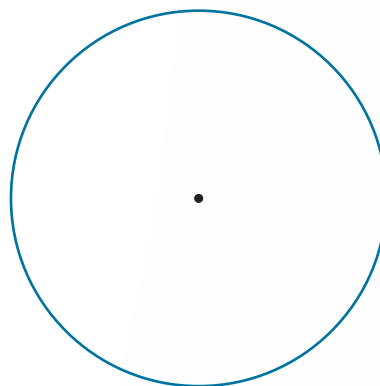
2. Σε κάθε κύκλο να κατασκευάσετε μια ακτίνα, χρησιμοποιώντας τον χάρακά σας και να συμπληρώσετε τον πίνακα.



Κύκλος 1



Κύκλος 2



Κύκλος 3

Κύκλος	Ακτίνα (cm)	Διάμετρος (cm)
1		
2		
3		

3. Να χρησιμοποιήσετε χάρακα και διαβήτη, για να κατασκευάσετε:

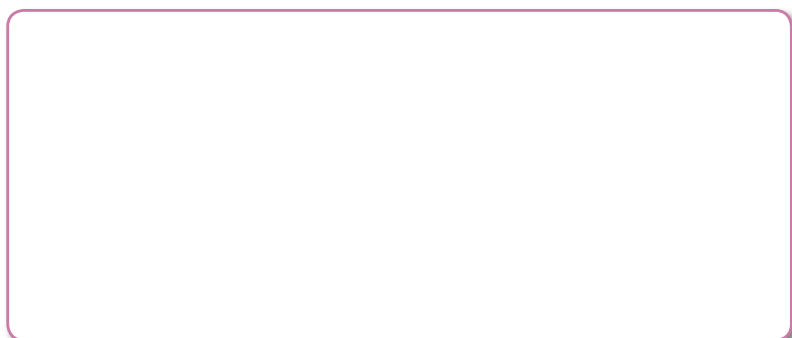
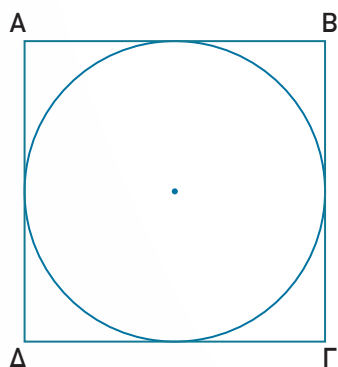
(α) κύκλο με ακτίνα 3 cm

(β) κύκλο με διάμετρο 4 cm

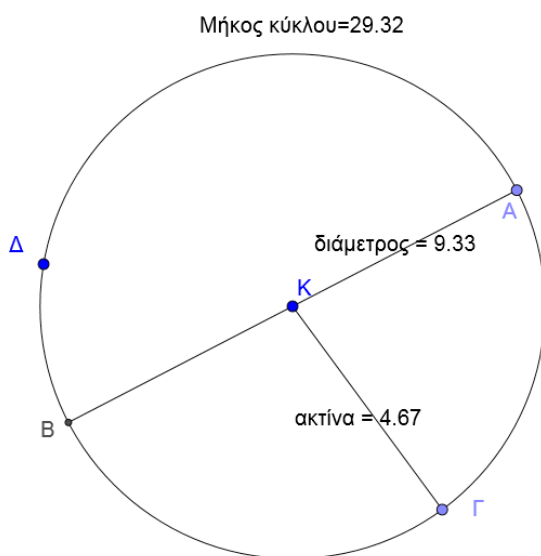
4. Ο κύριος Κώστας τοποθέτησε στην αυλή του μηχανισμό αυτόματου ποτίσματος, ο οποίος ποτίζει το γρασίδι σε ακτίνα 2 m. Να σχεδιάσετε την περιοχή, η οποία θα ποτίζεται, αν ο μηχανισμός θα τοποθετηθεί στο σημείο Κ.



5. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ, αν η ακτίνα του πιο κάτω κύκλου έχει μήκος 2 cm. Να επεξηγήσετε.



Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο. Να σύρετε το σημείο Δ και να συμπληρώσετε την πρώτη σειρά του πίνακα. Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για ακόμη τρεις κύκλους.



<https://www.geogebra.org/m/E2ubAj5f>



Κύκλος	Μήκος διαμέτρου	Μήκος κύκλου	$\frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Μήκος διαμέτρου}}$
A			
B			
Γ			
Δ			

(α) Τι παρατηρείτε για τον λόγο του μήκους του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου;

(β) Με ποιο τρόπο μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, αν γνωρίζετε το μήκος της διαμέτρου του;

Νέες Έννοιες

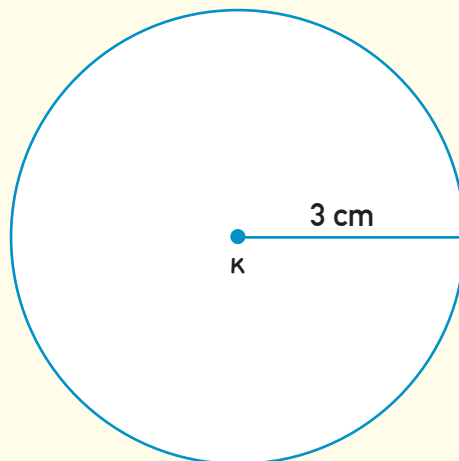
- Ο λόγος του μήκους του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι πάντα σταθερός και συμβολίζεται με το γράμμα "π".

$$\pi = \frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Μήκος διαμέτρου}} = 3,1415926535897932384626433...$$

- Το π στους υπολογισμούς το χρησιμοποιούμε συνήθως με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων δηλαδή, $\pi \cong 3,14$.
- Το μήκος ενός κύκλου (Γ) με ακτίνα R είναι:

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = 2\pi R$$

Παράδειγμα:



$$\Gamma = 2\pi R$$

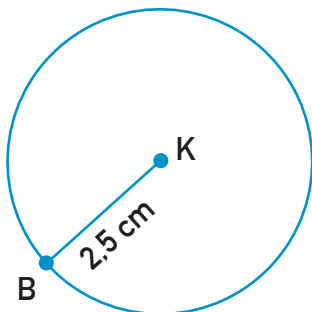
$$\text{Μήκος ακτίνας } R = 3 \text{ cm}$$

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6\pi \cong 6 \cdot 3,14 \cong 18,84 \text{ cm}$$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το μήκος των πιο κάτω κύκλων.

(α)



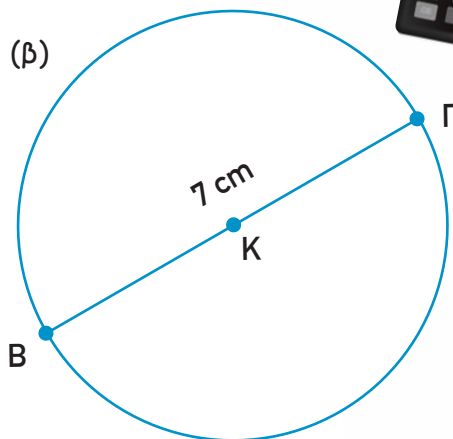
Λύση:

$$\Gamma = 2\pi R$$

$$\text{Μήκος ακτίνας } R = 2,5 \text{ cm}$$

$$\Gamma = 2\pi \cdot 2,5 = 5\pi \cong 5 \cdot 3,14 \cong 15,7 \text{ cm}$$

(β)



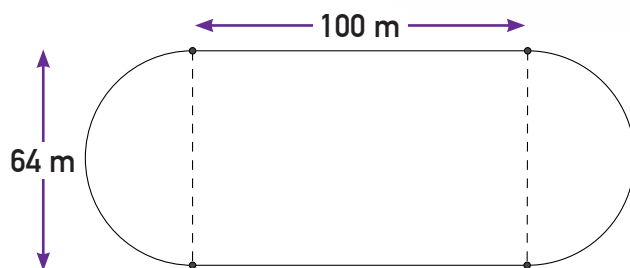
Λύση:

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος}$$

$$\text{Μήκος διαμέτρου} = 7 \text{ cm}$$

$$\Gamma = 7\pi \cong 7 \cdot 3,14 \text{ cm} \cong 21,98 \text{ cm}$$

2. Να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας του γηπέδου που παρουσιάζεται στη διπλανή εικόνα.



Λύση:

Το γήπεδο αποτελείται από ένα ορθογώνιο με μήκος 100 m και δύο ημικύκλια που το καθένα έχει διάμετρο 64 m.

Το μήκος του κύκλου με διάμετρο 64 m είναι ίσο με:

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = \pi \cdot 64 \cong 3,14 \cdot 64 \cong 200,96 \text{ m}$$

Το μήκος κάθε ημικυκλίου είναι ίσο με $200,96 \div 2 = 100,48 \text{ m}$.

Άρα, το μήκος της περιφέρειας του γηπέδου είναι ίσο με:

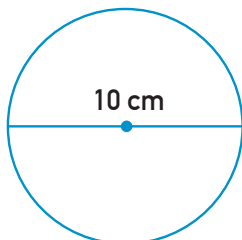
$$100,48 + 100 + 100,48 + 100 = 400,96 \text{ m}.$$



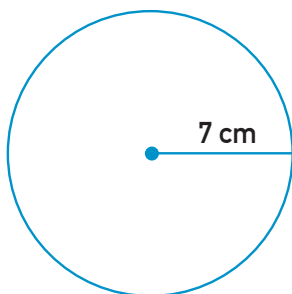
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το μήκος των πιο κάτω κύκλων.

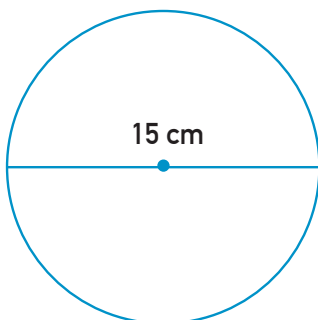
(α)



(β)



(γ)



2. Οι τροχοί του ποδηλάτου στη διπλανή εικόνα έχουν διάμετρο 80 cm. Πόση απόσταση θα καλύψει το ποδήλατο, αν οι τροχοί γυρίσουν 5 φορές;

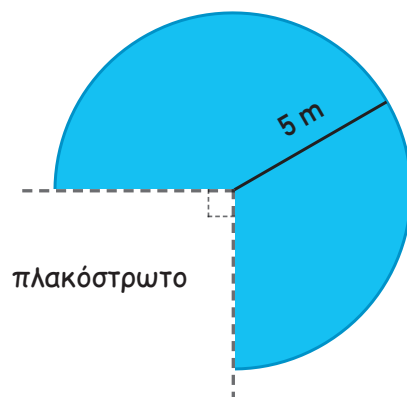


3. Σε έναν κυκλικό χώρο πρασίνου με διάμετρο 4,5 m θα τοποθετηθεί περιμετρικά περίφραξη.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της περίφραξης.

(β) Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης, αν η περίφραξη κοστίζει €4,00 το μέτρο.

4. Να υπολογίσετε το μήκος της πιο κάτω πισίνας.

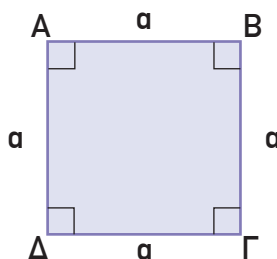


Έχουμε μάθει:

• Τετράγωνο

$$\Pi_{\text{τετραγώνου}} = 4a$$

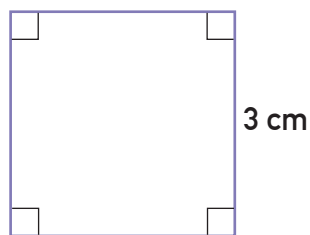
$$Ε_{\text{τετραγώνου}} = a^2$$



Παράδειγμα:

$$\Pi = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$$

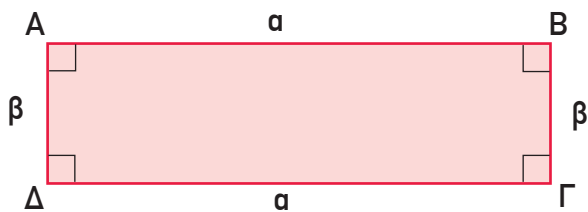
$$Ε = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$



• Ορθογώνιο

$$\Pi_{\text{ορθογωνίου}} = 2a + 2\beta = 2(a + \beta)$$

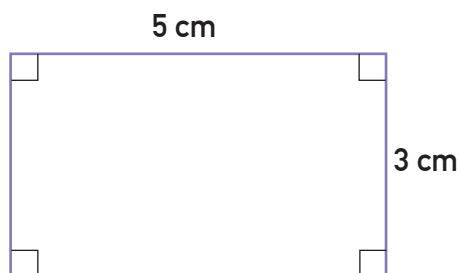
$$Ε_{\text{ορθογωνίου}} = a \cdot \beta$$



Παράδειγμα:

$$\Pi = 2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$$

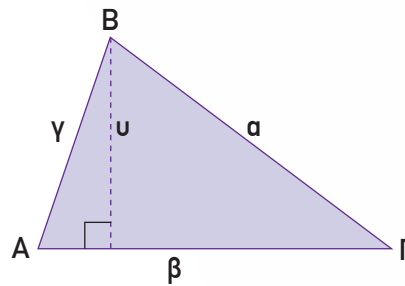
$$Ε = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2$$



• Τρίγωνο

$$\Pi_{\text{τρίγωνου}} = \alpha + \beta + \gamma$$

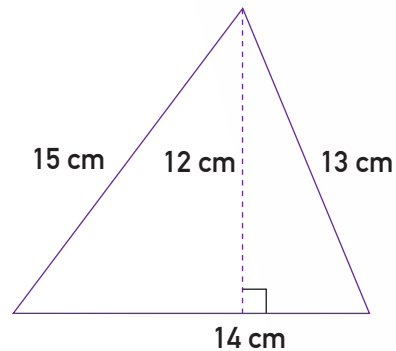
$$E_{\text{τρίγωνου}} = \frac{\beta \cdot u}{2}$$



Παράδειγμα:

$$\Pi = 13 + 14 + 15 = 42 \text{ cm}$$

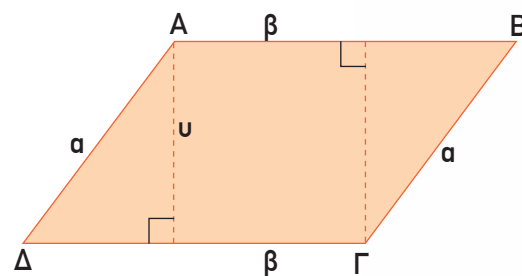
$$E = \frac{14 \cdot 12}{2} = \frac{168}{2} = 84 \text{ cm}^2$$



• Παραλληλόγραμμο

$$\Pi_{\text{παραλληλογράμμου}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$$

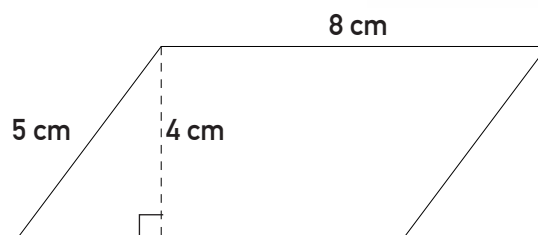
$$E_{\text{παραλληλογράμμου}} = \beta \cdot u$$



Παράδειγμα:

$$\Pi = 2 \cdot (8 + 5) = 2 \cdot 13 = 26 \text{ cm}$$

$$E = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$$



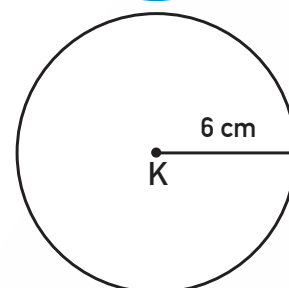
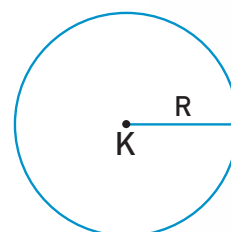
• Κύκλος

$$\Gamma = \pi \cdot \text{Διάμετρος} = 2\pi R$$

Παράδειγμα:

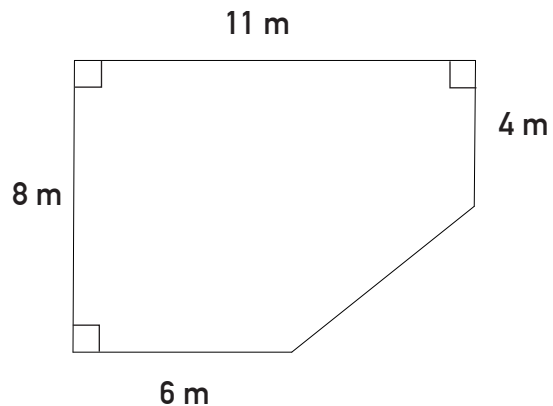
$$\text{Μήκος ακτίνας } R = 6 \text{ cm}$$

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot 6 = 12\pi \cong 12 \cdot 3,14 \cong 37,68 \text{ cm}$$

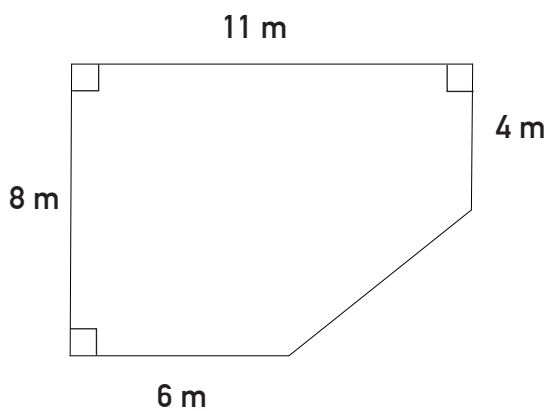


Ο Νικόλας θα τοποθετήσει χορτοτάπητα στην αυλή του σπιτιού του. Το σχεδιάγραμμα παρουσιάζει το σχήμα και τις διαστάσεις της αυλής.

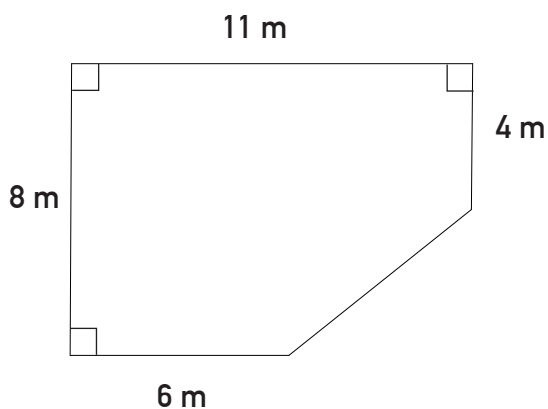
Να εισηγηθείτε δύο διαφορετικούς τρόπους, για να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του χορτοτάπητα που θα τοποθετηθεί στην αυλή. Να επεξηγήσετε.



A' τρόπος



B' τρόπος

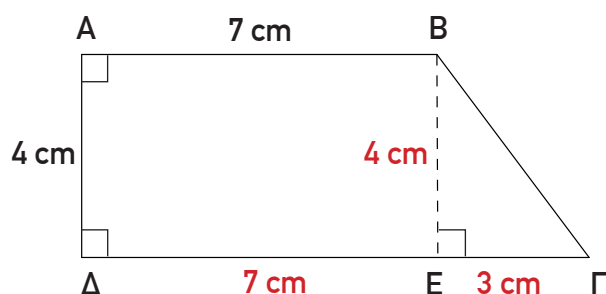


Παράδειγμα

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

Λύση:

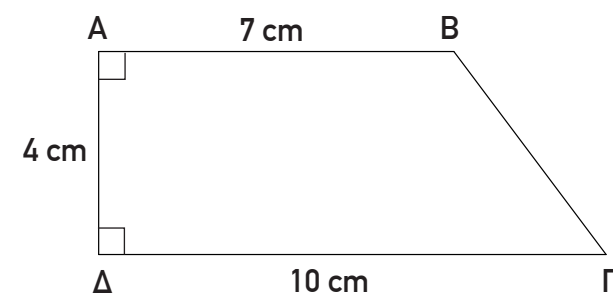
A' τρόπος



$$E_{ABED} = 7 \cdot 4 = 28 \text{ cm}^2$$

$$E_{BGE} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$E_{ABGD} = 28 + 6 = 34 \text{ cm}^2$$

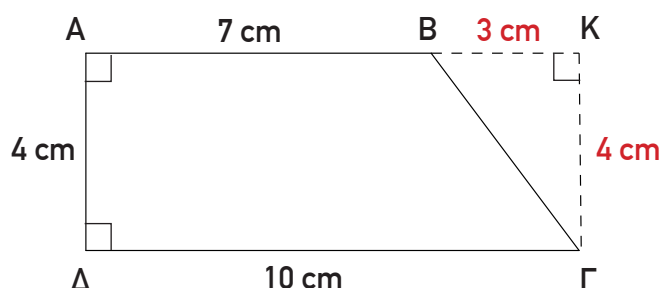


Φέρουμε από την κορυφή Β το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ κάθετο στην πλευρά ΔΓ.

Υπολογίζουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΕΔ και του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ.

Προσθέτουμε τα δύο εμβαδά, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

B' τρόπος



$$E_{AKGD} = 10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$$

$$E_{BKΓ} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$E_{ABGD} = 40 - 6 = 34 \text{ cm}^2$$

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά 3 cm. Από την κορυφή Γ φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΚ κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ.

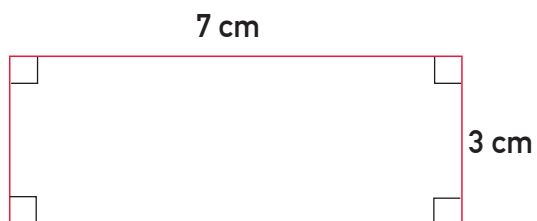
Υπολογίζουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΚΓΔ και του ορθογωνίου τριγώνου ΒΚΓ.

Αφαιρούμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΒΚΓ από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΚΓΔ.

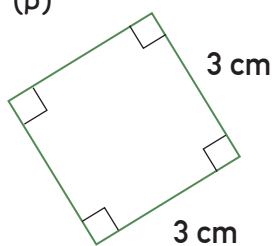
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων.

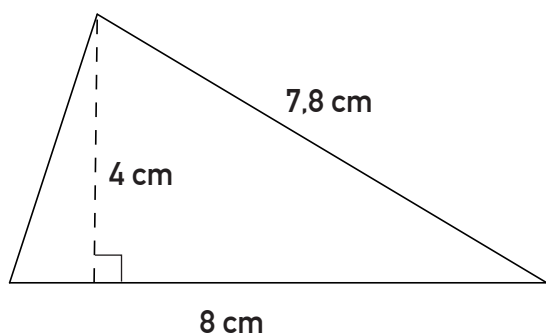
(α)



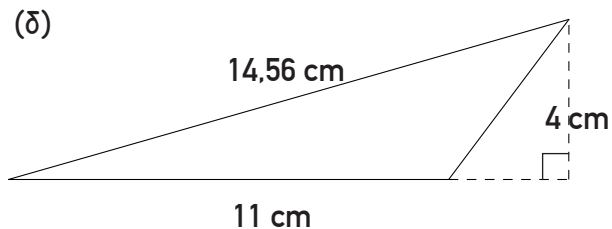
(β)



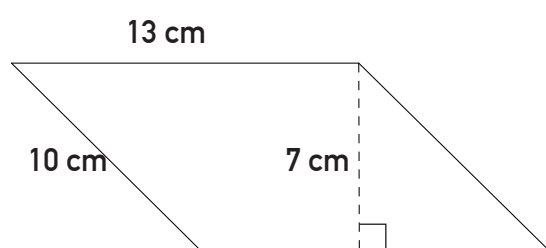
(γ)



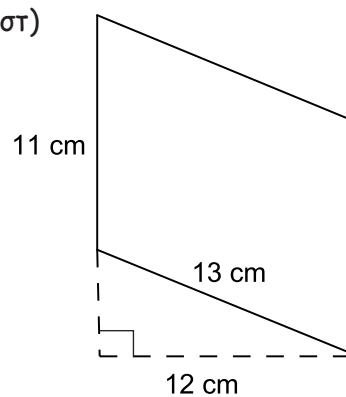
(δ)



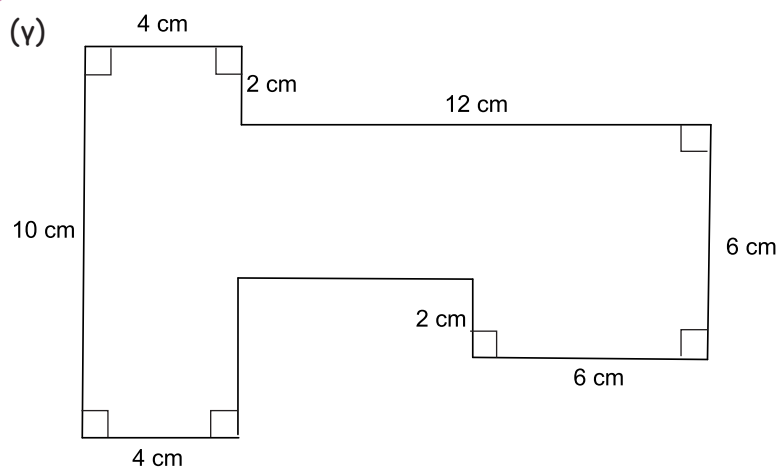
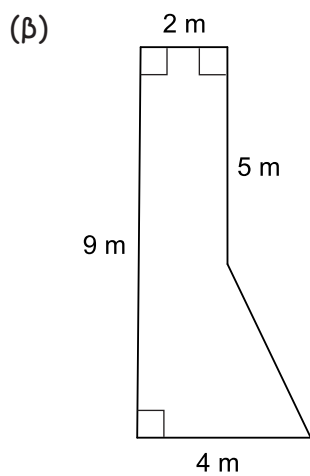
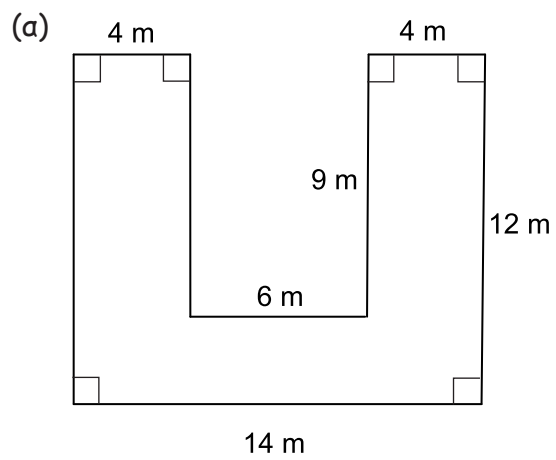
(ε)



(στ)

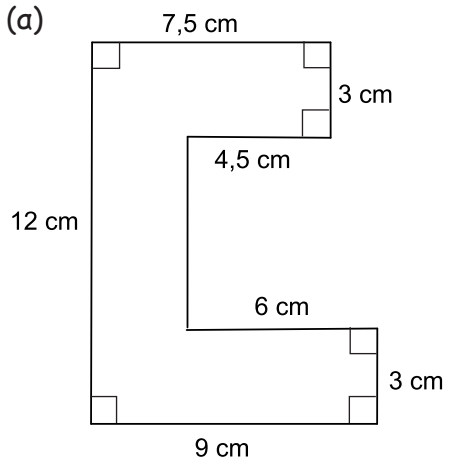


2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων.

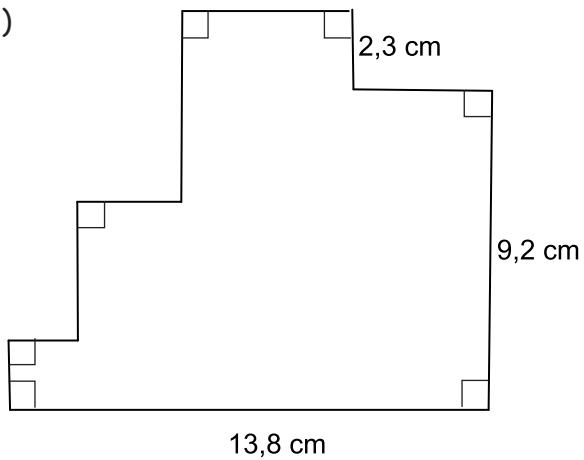


3. Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων.

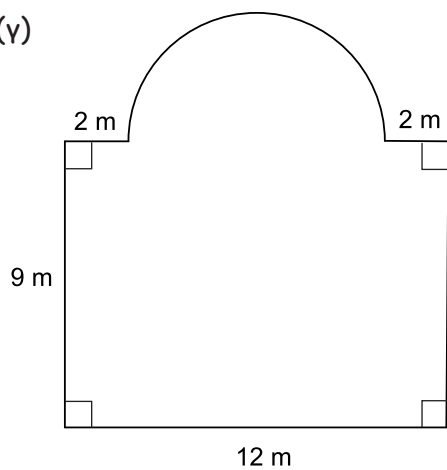
(α)



(β)



(γ)



4. (α) Να γράψετε τις διαστάσεις όλων των ορθογωνίων με περίμετρο 24 cm στον πιο κάτω πίνακα. Οι διαστάσεις των ορθογωνίων να είναι ακέραιοι αριθμοί.

	Μήκος (cm)	Πλάτος (cm)	Περίμετρος (cm)	Εμβαδόν (cm ²)
A	11	1	24	11
B				
Γ				
Δ				
Ε				
Ζ				

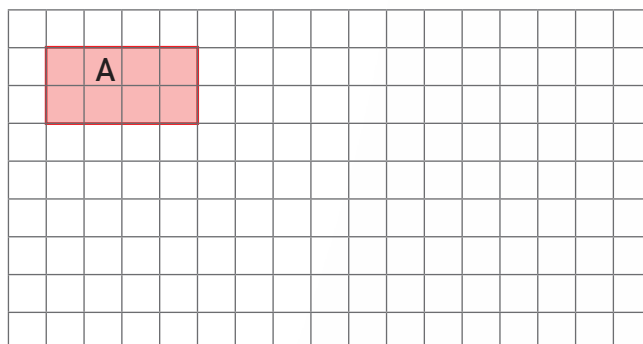
Ποιο από τα πιο πάνω ορθογώνια έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

- (β) Ο Μάνος θα χρησιμοποιήσει σύρμα περίφραξης με μήκος 16 m, για να περιφράξει έναν ορθογώνιο λαχανόκηπο στην αυλή του. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του λαχανόκηπου, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν; Να επεξηγήσετε.

5.

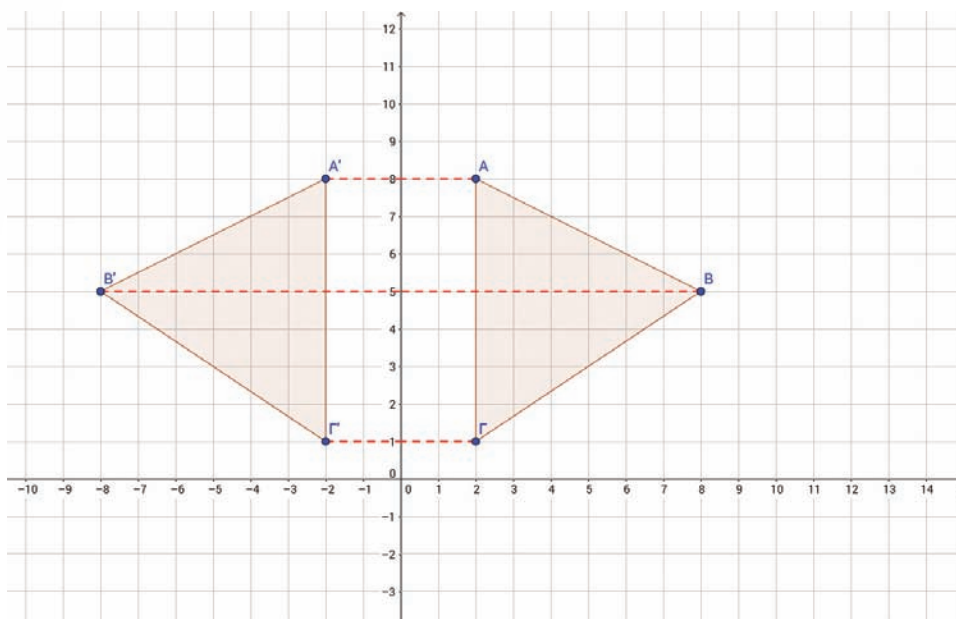


Αν διπλασιάσω τις διαστάσεις του ορθογωνίου Α, τότε το εμβαδόν του θα τετραπλασιαστεί.



Συμφωνείτε με τον Δημήτρη; Να επεξηγήσετε.

Ο Τάσος και η Νίκη εργάζονται στο πιο κάτω εφαρμογίδιο. Τα σχήματα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα.



www.geogebra.org/m/g4DEckfc

(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$.

A (_____ , _____)

B (_____ , _____)

Γ (_____ , _____)

A' (_____ , _____)

B' (_____ , _____)

Γ' (_____ , _____)

(β) Να γράψετε την απόσταση των πιο κάτω σημείων από τον άξονα συμμετρίας.

A _____

B _____

Γ _____

A' _____

B' _____

Γ' _____

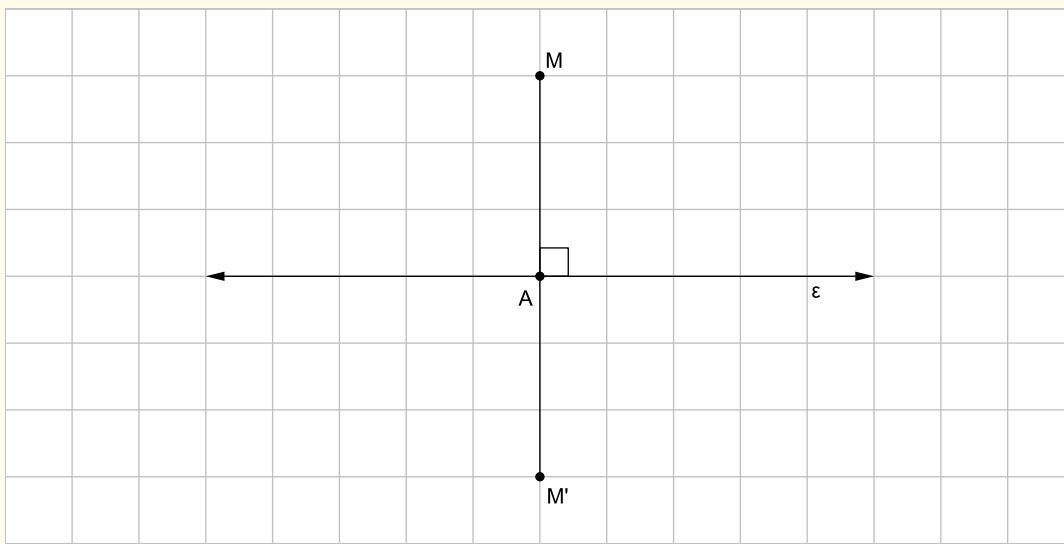
Τι παρατηρείτε;

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να σύρετε τις κορυφές του σχήματος $AB\Gamma$ σε διαφορετική θέση. Να εξετάσετε κατά πόσο η παρατήρησή σας στο ερώτημα (β) ισχύει και σε άλλες περιπτώσεις συμμετρικών σχημάτων.

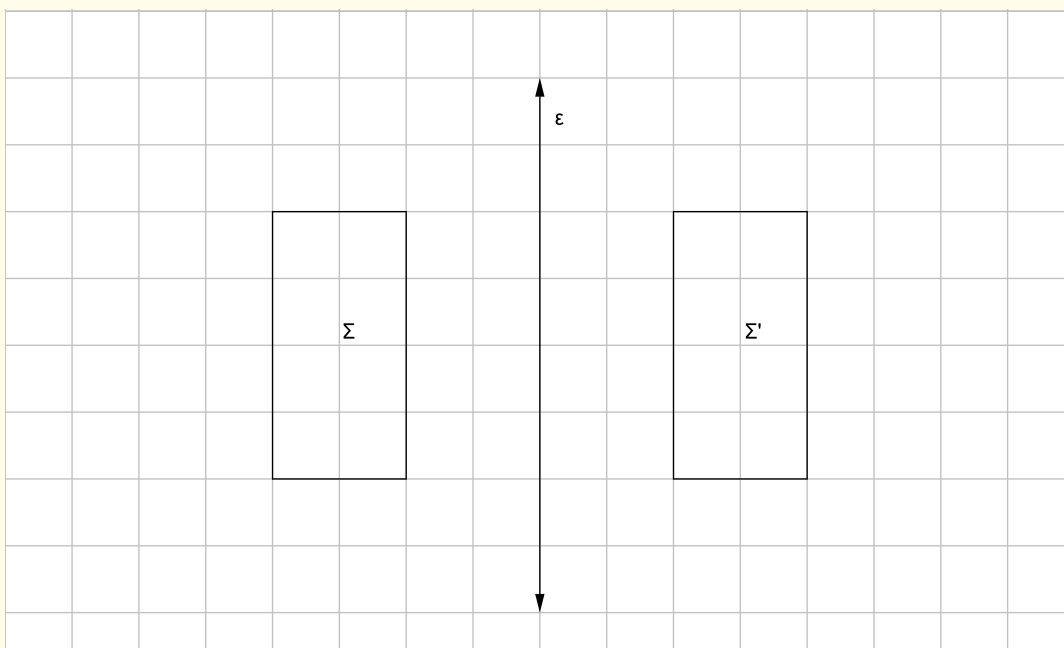
Νέες Έννοιες

- Συμμετρία ως προς άξονα

- Τα σημεία M και M' είναι **συμμετρικά** με **άξονα συμμετρίας** την ευθεία ε .
- Τα σημεία M και M' ισαπέχουν από την ευθεία ε (3 μονάδες).
- Τα ευθύγραμμα τμήματα MA και $M'A$ είναι **κάθετα** στην ευθεία ε .

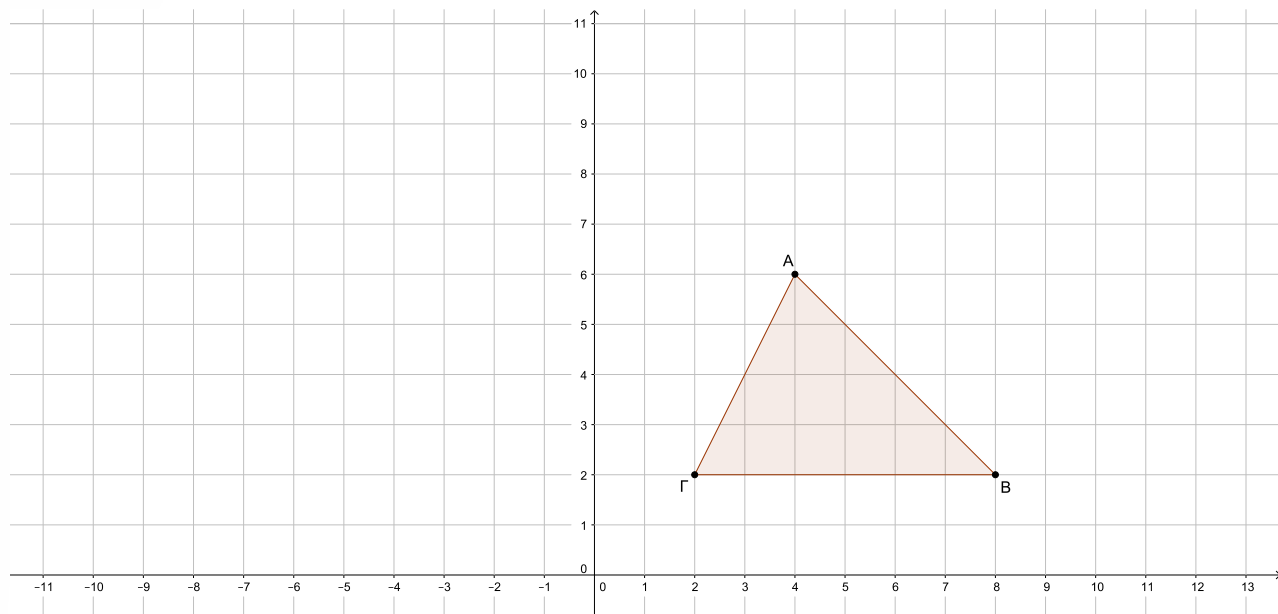


- Τα σχήματα Σ και Σ' είναι **συμμετρικά** με **άξονα συμμετρίας** την ευθεία ε .
- Το σχήμα Σ' δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του σχήματος Σ ως προς την ευθεία ε .



Παράδειγμα

1. (α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ.

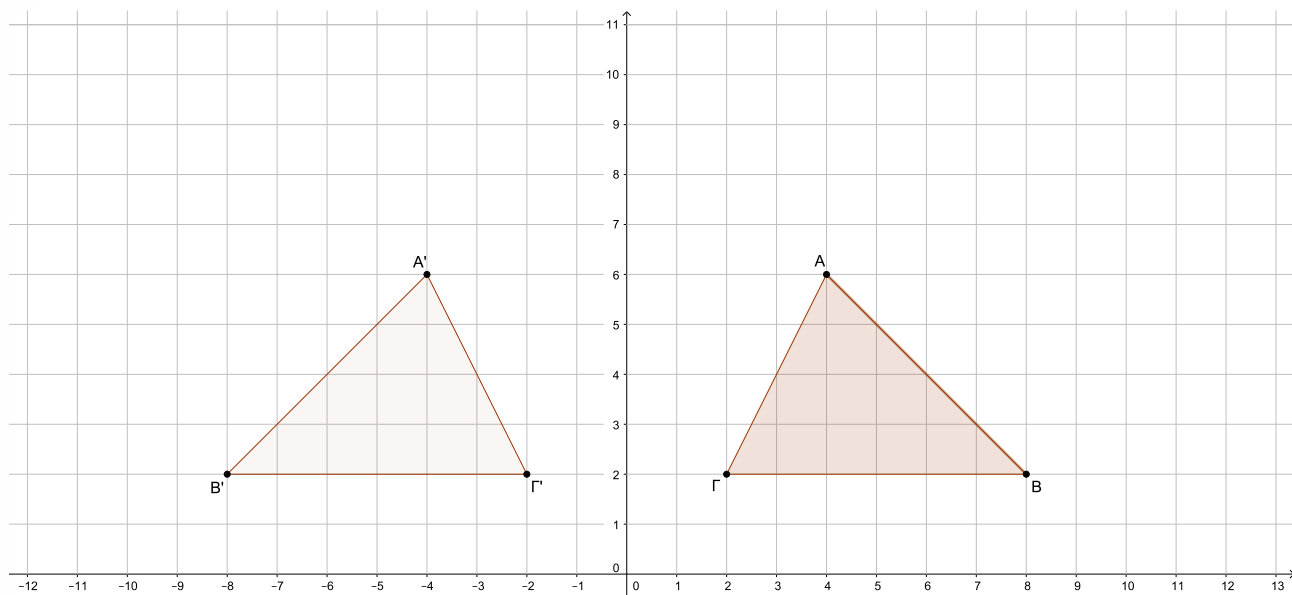


Λύση:

A (4, 6) B (8, 2) Γ (2, 2)

(β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα του τριγώνου ΑΒΓ με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση:

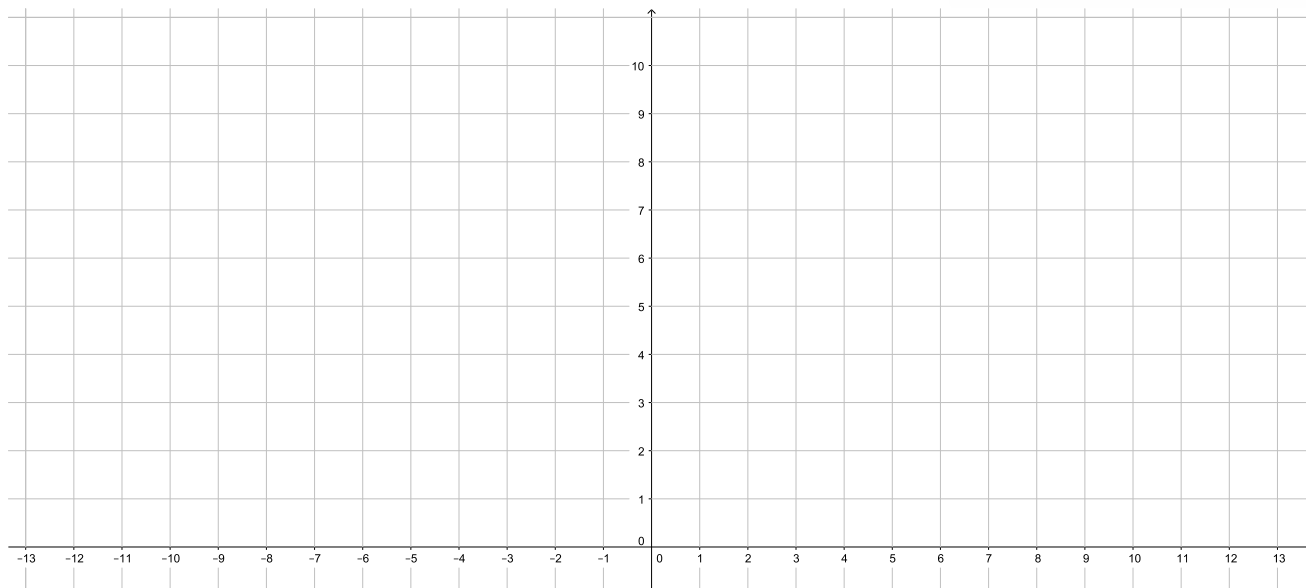


A (-4, 6) B (-8, 2) Γ (-2, 2)

Δραστηριότητες

1. (α) Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με συντεταγμένες:

A (2,5) B (6,5) Γ (6,2) Δ (2,2)

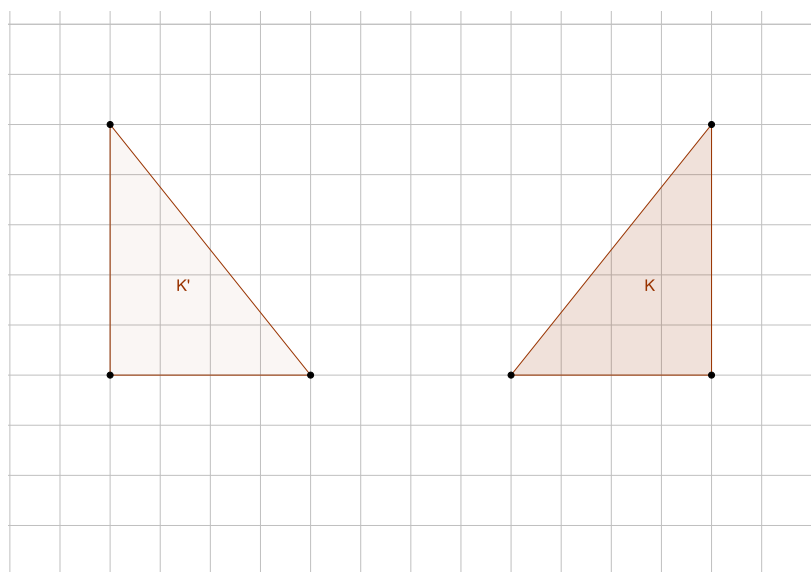


(β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα του ορθογώνιου ΑΒΓΔ με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

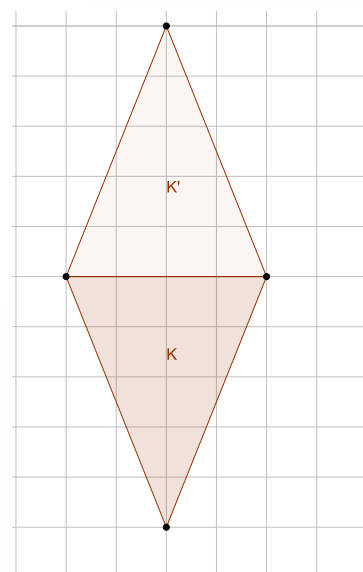
A' (,) B' (,) Γ' (,) Δ' (,)

2. Το σχήμα Κ' είναι συμμετρικό του σχήματος Κ. Να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας σε κάθε περίπτωση.

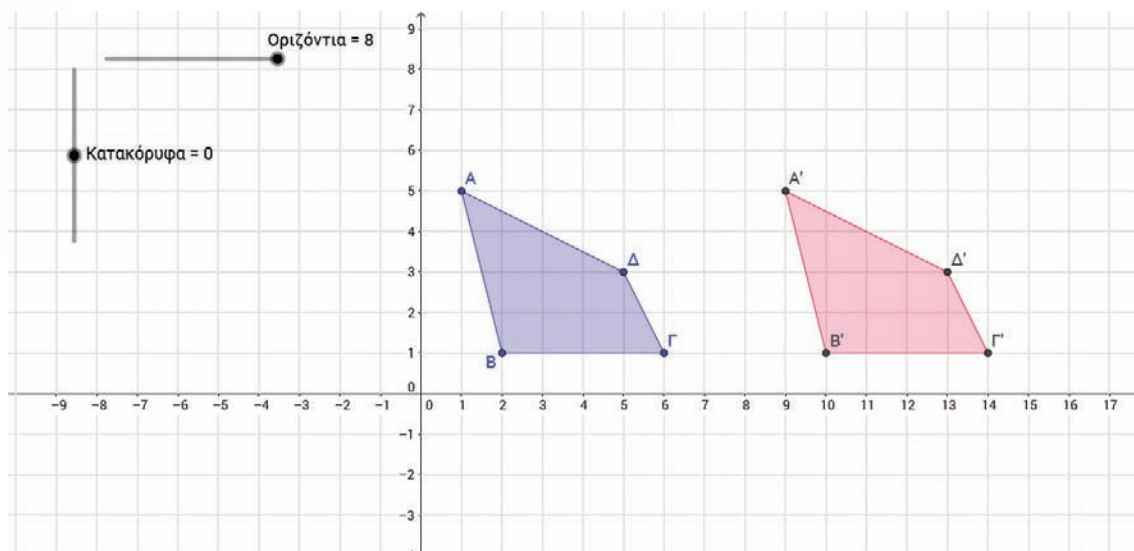
(α)



(β)



Η Πηνελόπη εργάστηκε με το πιο κάτω εφαρμογίδιο, για να μετακινήσει το σχήμα ΑΒΓΔ 8 τετράγωνα δεξιά. Από τη μεταφορά αυτή προέκυψε το σχήμα Α'Β'Γ'Δ'.



www.geogebra.org/m/XqEqjucj

(α) Να συγκρίνετε τα δύο σχήματα ως προς τη μορφή, το μέγεθος και τη θέση τους.

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των πιο κάτω σημείων:

A και A' _____

B και B' _____

Γ και Γ' _____

Δ και Δ' _____

Τι παρατηρείτε;

(γ) Να χρησιμοποιήσετε τον δρομέα στο εφαρμογίδιο, για να μεταφέρετε το σχήμα ΑΒΓΔ:

(i) 3 τετράγωνα αριστερά

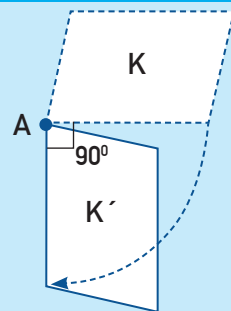
(ii) 2 τετράγωνα δεξιά

(iii) 2 τετράγωνα κάτω

Τι παρατηρείτε για την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Α', Β και Β', Γ και Γ' και Δ και Δ' σε κάθε περίπτωση;

Περιστροφή ονομάζουμε τον μετασχηματισμό στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου με γωνία περιστροφής θ . Τα δύο σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους.

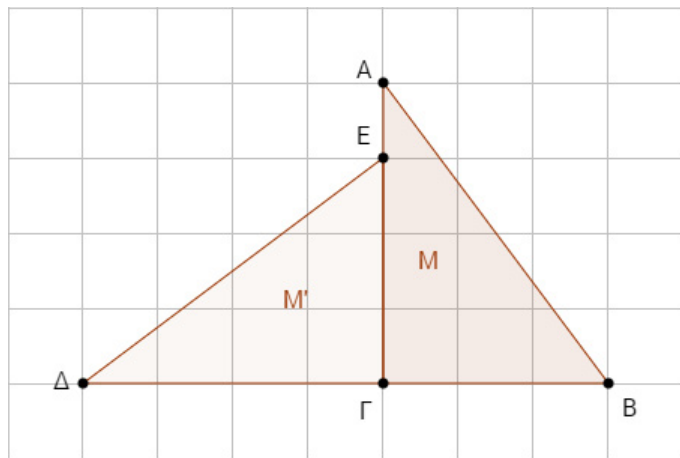
Για παράδειγμα, το διπλανό σχήμα περιστράφηκε γύρω από το σημείο A κατά 90° δεξιόστροφα.



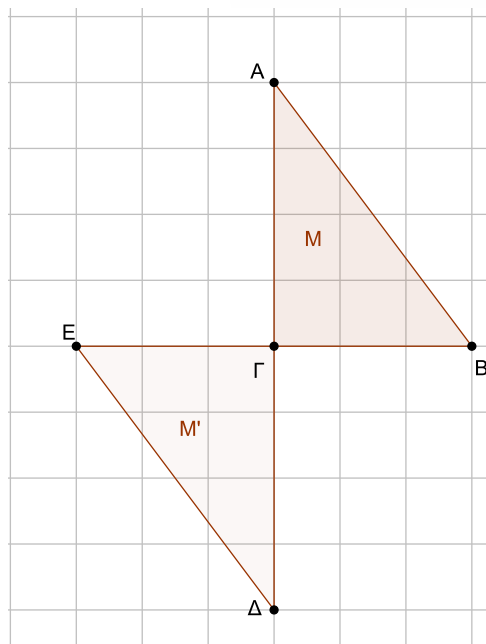
Να περιγράψετε την περιστροφή που εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση, ώστε το τρίγωνο ABΓ να βρεθεί από τη θέση M στη θέση M'.

Να προσδιορίσετε το σημείο που αποτελεί το κέντρο της περιστροφής και τη γωνία περιστροφής.

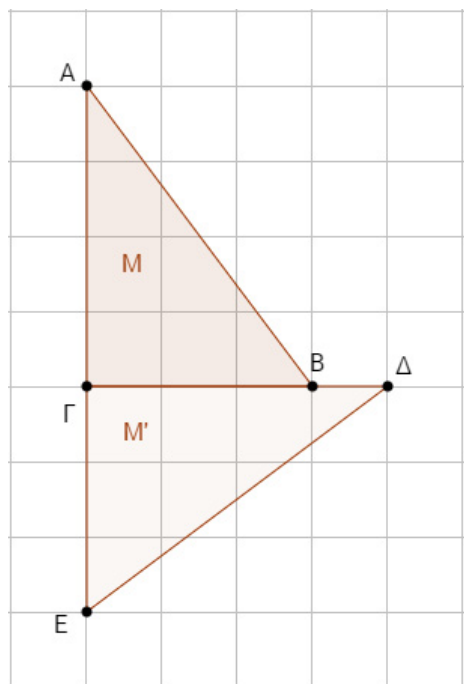
(α)



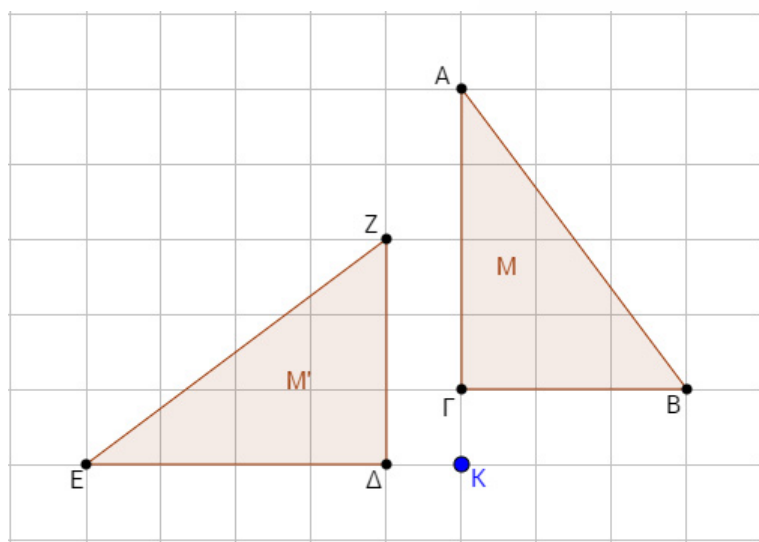
(β)



(γ)



(δ)



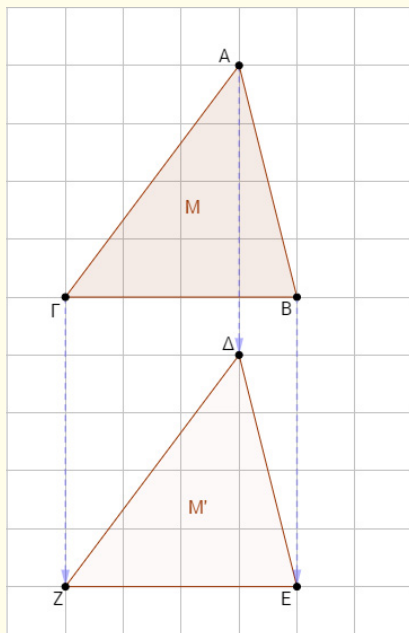
Νέες Έννοιες

- Μετασχηματισμοί

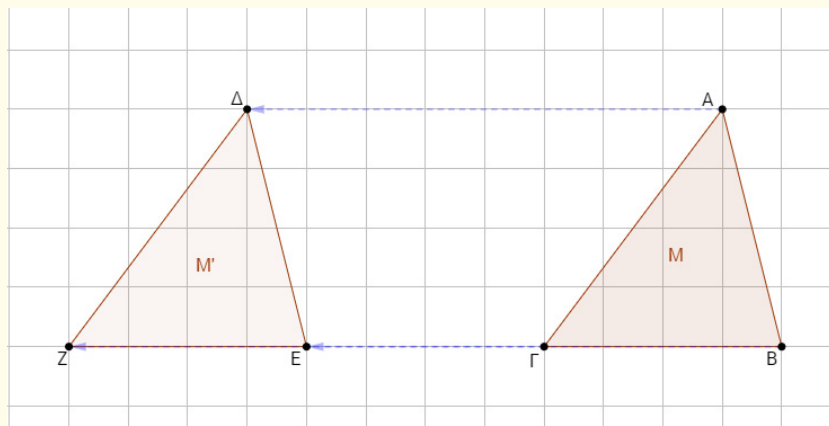
- Παράλληλη μεταφορά ονομάζουμε τον μετασχηματισμό στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος μετακινείται προς την ίδια κατεύθυνση και σε ίση απόσταση. Τα δύο σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους.

Παραδείγματα:

Το τρίγωνο ΔΕΖ προκύπτει από μια παράλληλη μεταφορά του τριγώνου ΑΒΓ. Κάθε σημείο του τριγώνου ΑΒΓ μετακινείται 5 μονάδες προς τα κάτω.



Το τρίγωνο ΔΕΖ προκύπτει από μια παράλληλη μεταφορά του τριγώνου ΑΒΓ. Κάθε σημείο του τριγώνου ΑΒΓ μετακινείται 8 μονάδες προς τα αριστερά.

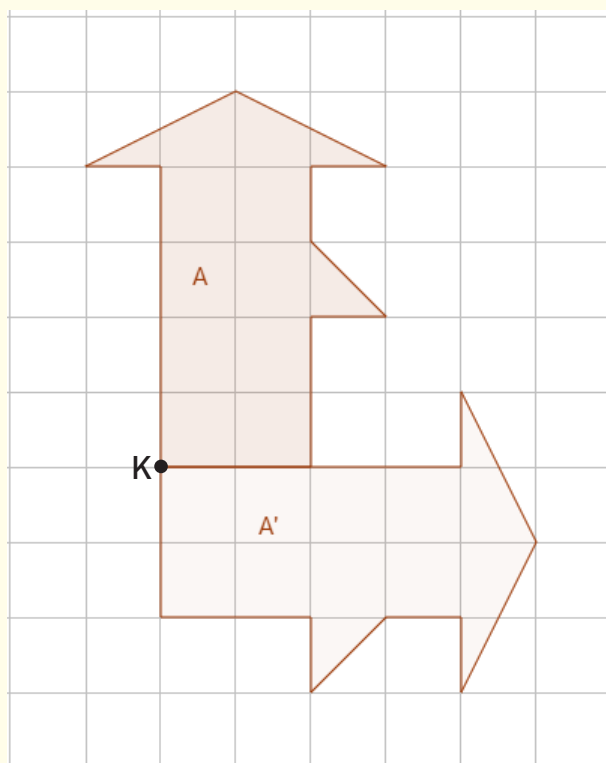


Νέες Έννοιες

- **Περιστροφή** ονομάζουμε τον μετασχηματισμό στον οποίο κάθε σημείο ενός σχήματος περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου (**κέντρο** του μετασχηματισμού) με **γωνία περιστροφής** θ . Τα δύο σχήματα είναι **ίσα** μεταξύ τους.

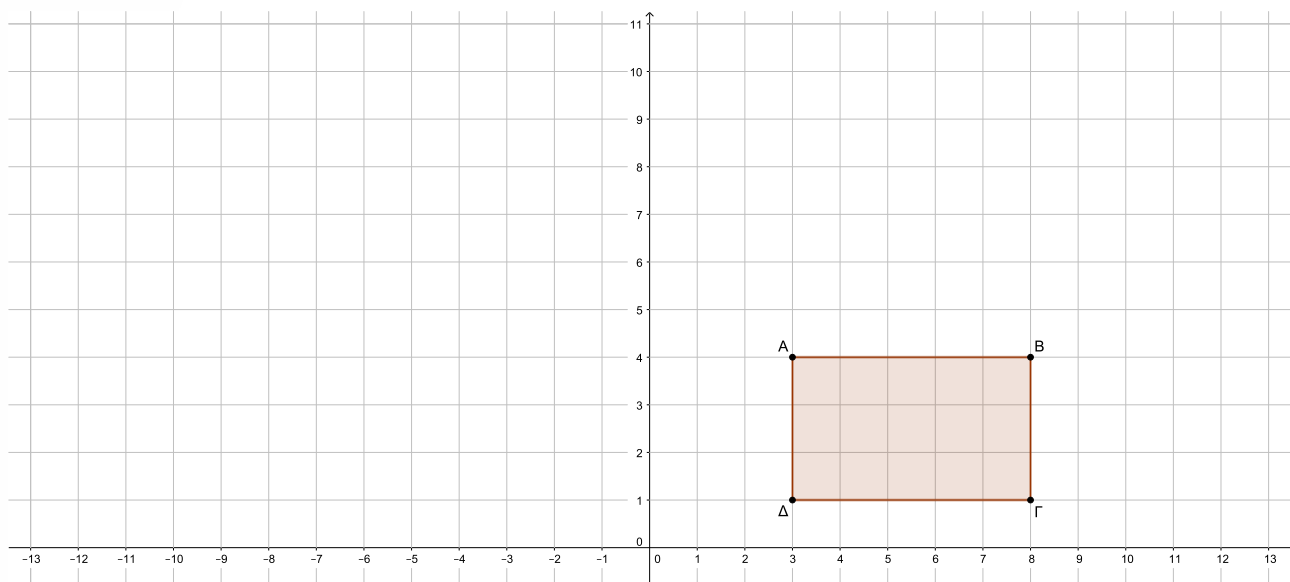
Παράδειγμα:

Το σχήμα A' προκύπτει από μια περιστροφή του σχήματος A με κέντρο το σημείο K και γωνία 90° δεξιόστροφα.



Παραδείγματα

1. (α) Να γράψετε τις συντεταγμένες του πιο κάτω ορθογωνίου.

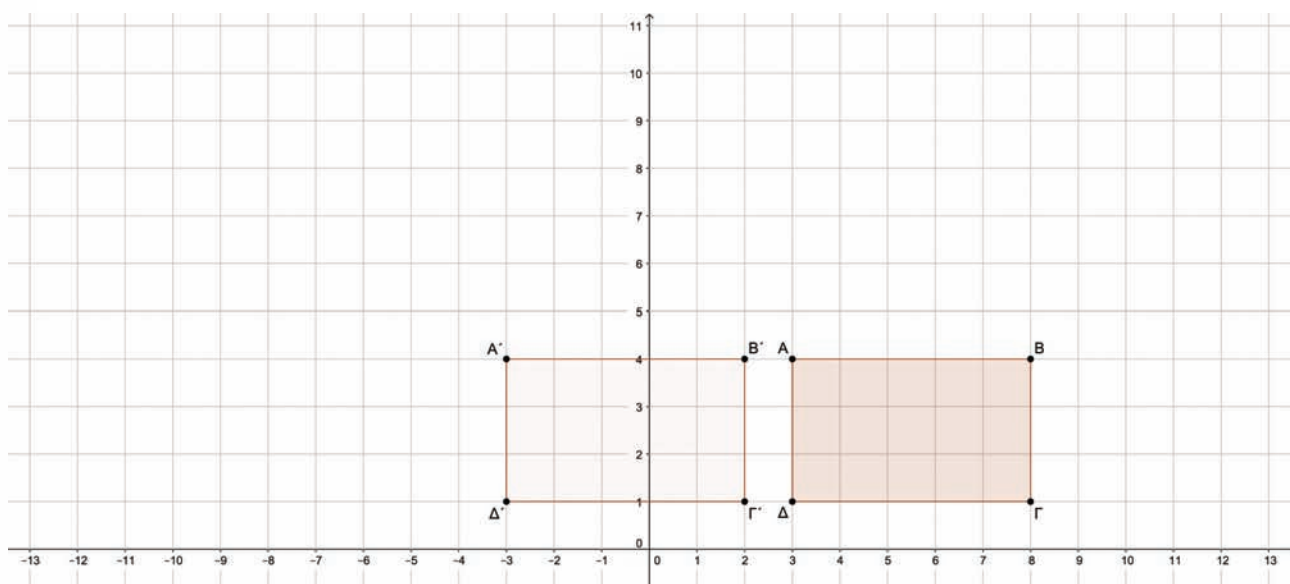


Λύση:

A (3,4) B (8,4) Γ (8,1) Δ (3,1)

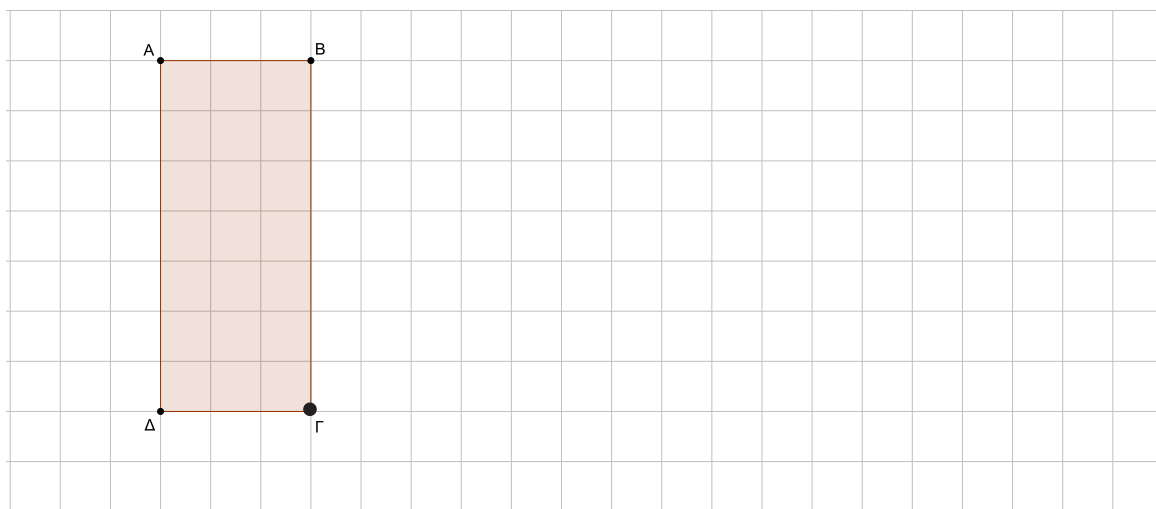
(β) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ θα μετακινηθεί 6 τετράγωνα αριστερά. Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο ΕΖΗΘ που είναι το αποτέλεσμα της μεταφοράς και να γράψετε τις συντεταγμένες του.

Λύση:

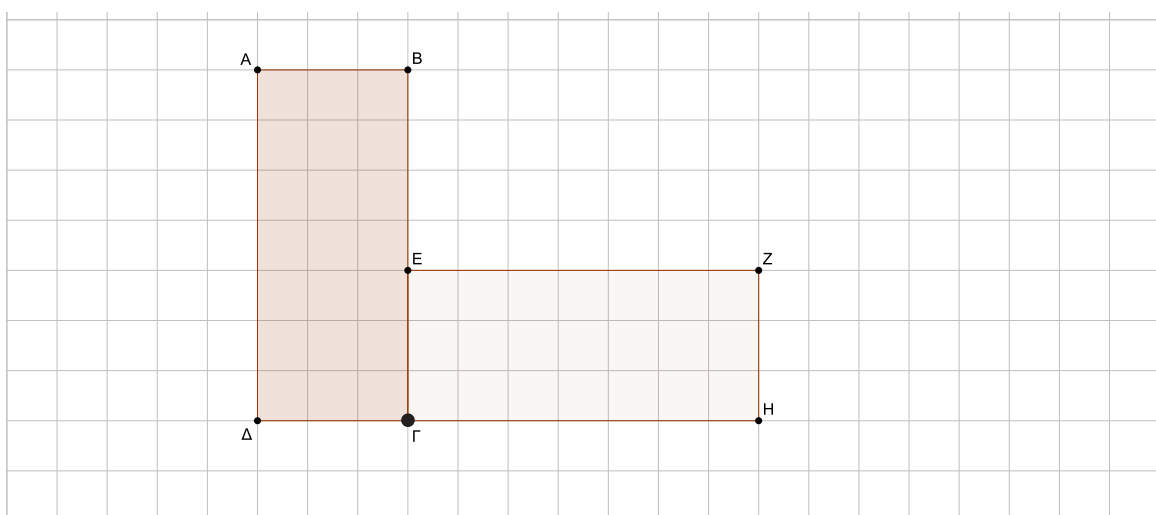


A' (-3,4) B' (2,4) Γ' (2,1) Δ' (-3,1)

2. Να περιστρέψετε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Γ και γωνία 90° δεξιόστροφα.



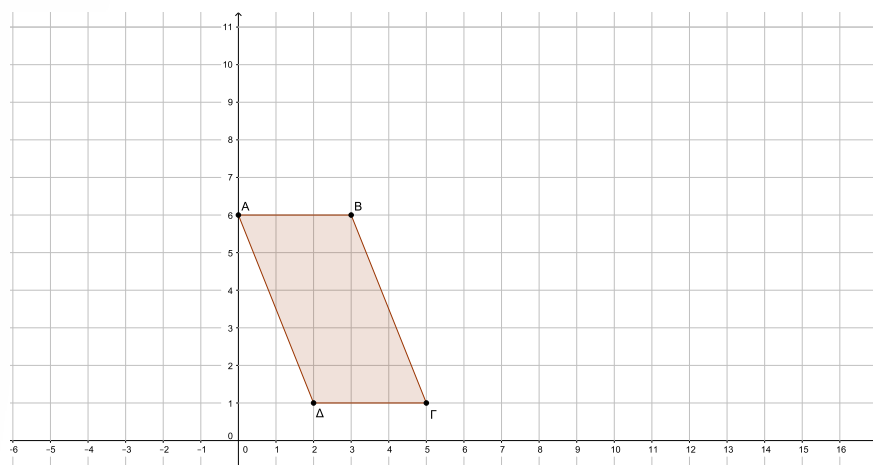
Λύση:



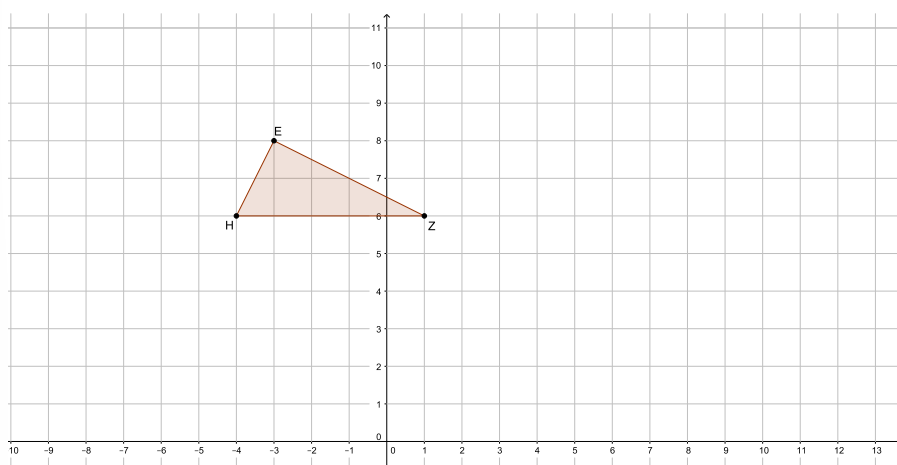
Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού, αν το σχήμα μετακινηθεί:

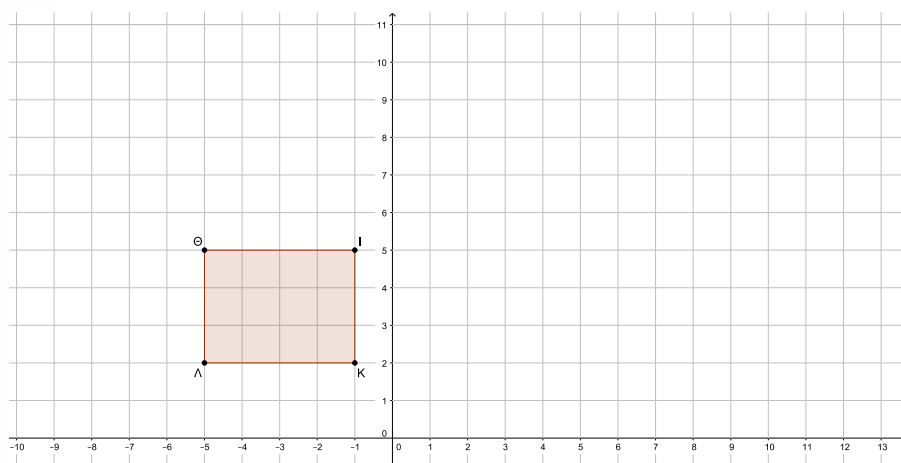
(α) 5 τετράγωνα αριστερά



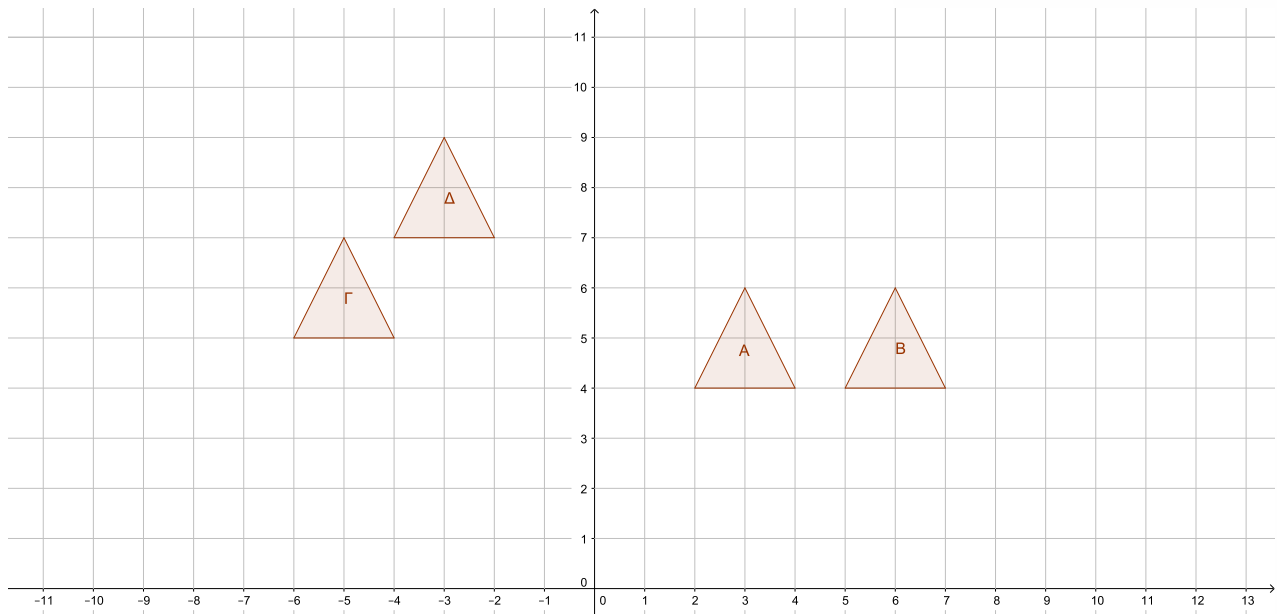
(β) 3 τετράγωνα κάτω



(γ) 6 τετράγωνα δεξιά και 2 τετράγωνα πάνω



2. Να συμπληρώσετε, όπως στο παράδειγμα.



Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Α στο τρίγωνο Β:

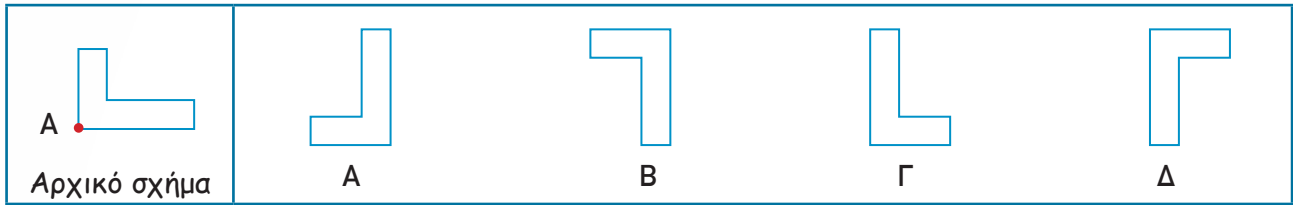
Μετακινούμε κάθε σημείο του τριγώνου Α 3 μονάδες προς τα δεξιά.

(α) Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Β στο τρίγωνο Γ

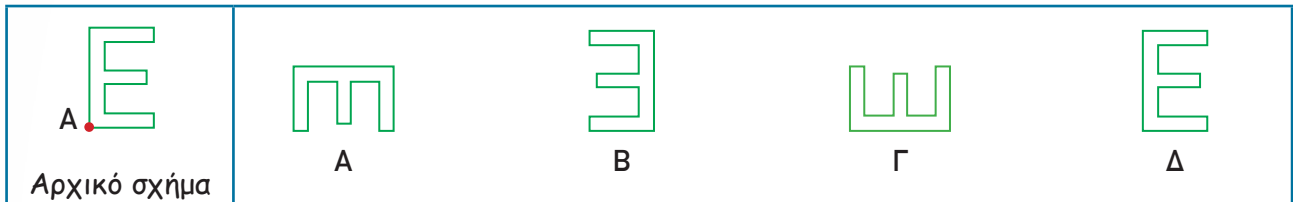
(β) Για να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο Γ στο τρίγωνο Δ

3. Να βάλετε σε κύκλο σχήμα που θα προκύψει, όταν το αρχικό σχήμα περιστραφεί γύρω από το σημείο A:

(α) αριστερόστροφα κατά 90°



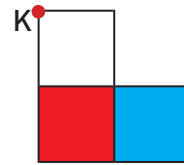
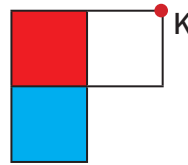
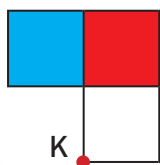
(β) δεξιόστροφα κατά 180°



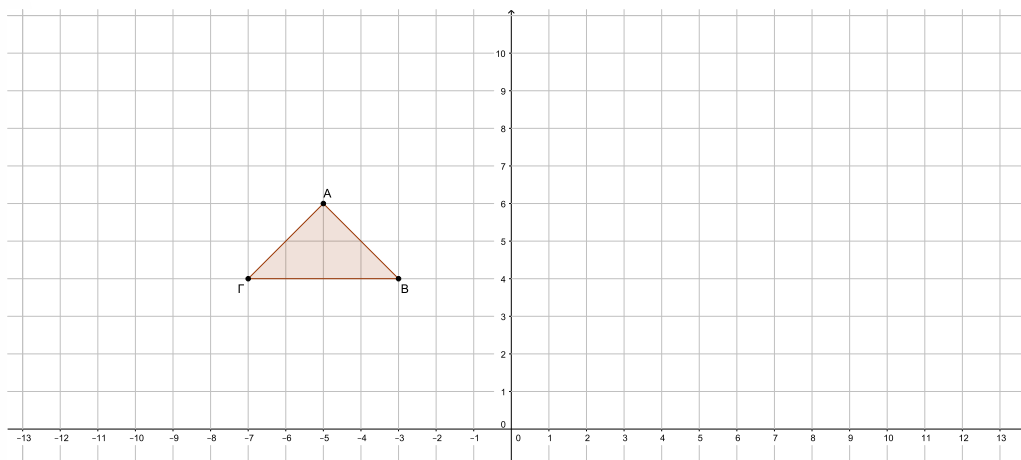
4. Το πιο κάτω σχήμα περιστράφηκε με κέντρο το σημείο K κατά 90° δεξιόστροφα.



Να βάλετε σε κύκλο το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή του.



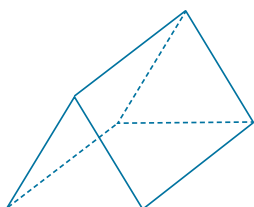
5. Το σχήμα ABΓ θα περιστραφεί δεξιόστροφα κατά 90° γύρω από το σημείο B. Να σχεδιάσετε το σχήμα που θα προκύψει από την περιστροφή και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.



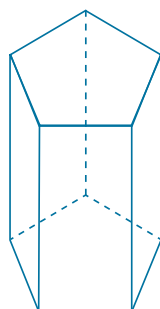
Έχουμε μάθει:

- Να αναγνωρίζουμε στερεά σχήματα, όπως:

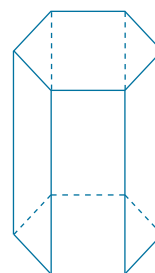
Πρίσματα



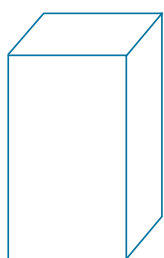
Τριγωνικό
πρίσμα



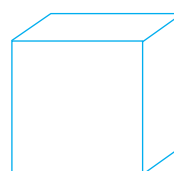
Πενταγωνικό
πρίσμα



Εξαγωνικό
πρίσμα

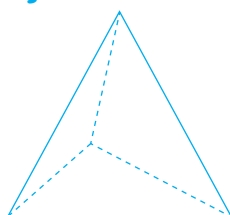


Ορθογώνιο
παραλληλεπίπεδο

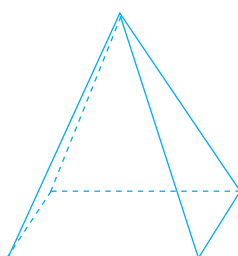


Κύβος

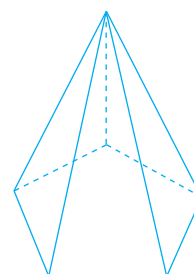
Πυραμίδες



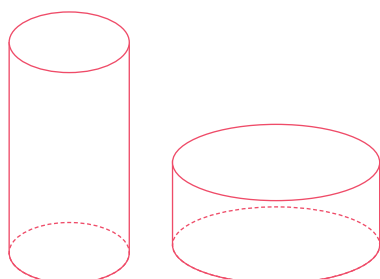
Τριγωνική
πυραμίδα



Τετραγωνική
πυραμίδα



Πενταγωνική
πυραμίδα

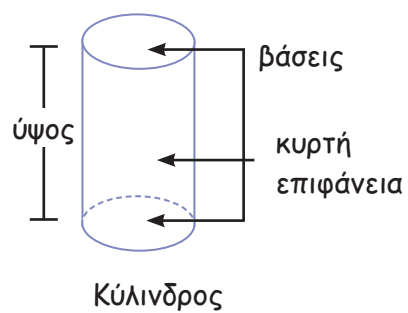
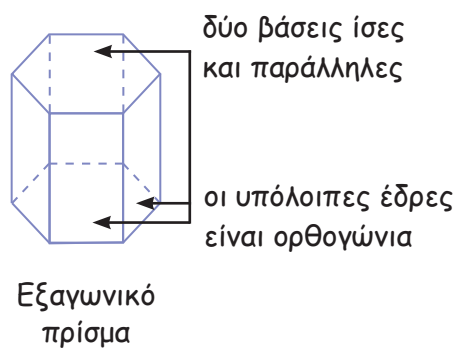
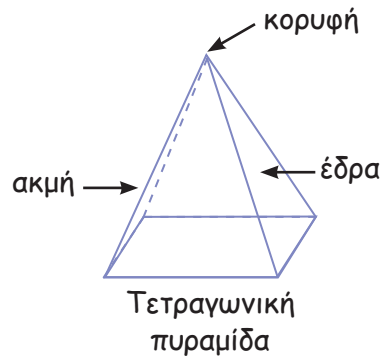
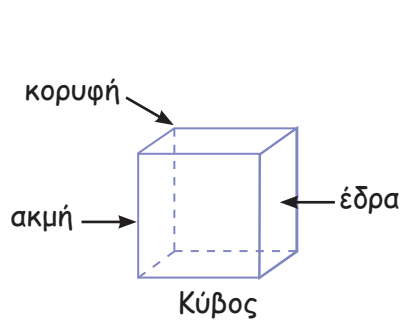


Κύλινδρος

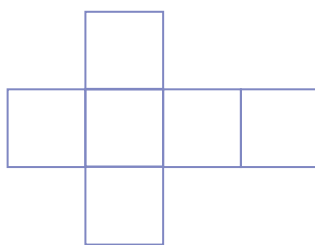


Κώνος

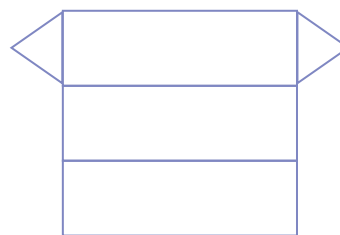
- Να αναγνωρίζουμε χαρακτηριστικά στοιχεία τους, όπως:



- Να αναγνωρίζουμε τα αναπτύγματα στερεών σχημάτων όπως:

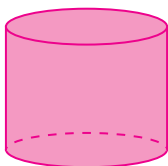


Ανάπτυγμα κύβου

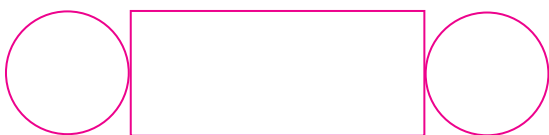


Ανάπτυγμα τριγωνικού πρίσματος

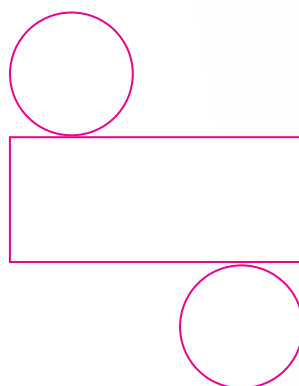
(α) Ποια από τα πιο κάτω σχήματα είναι αναπτύγματα κυλίνδρου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



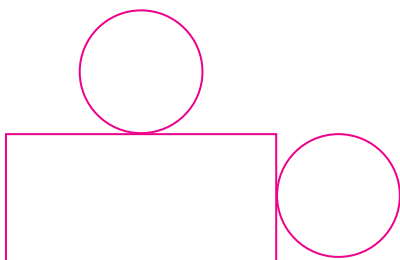
A.



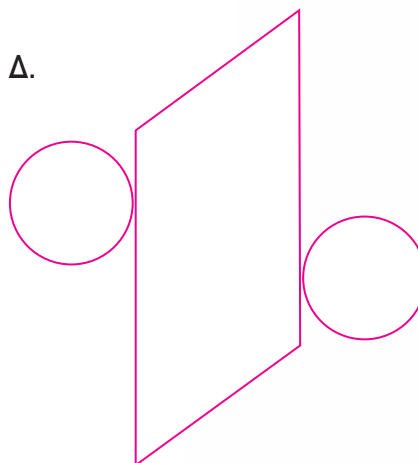
B.



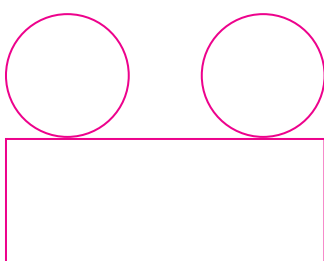
Γ.



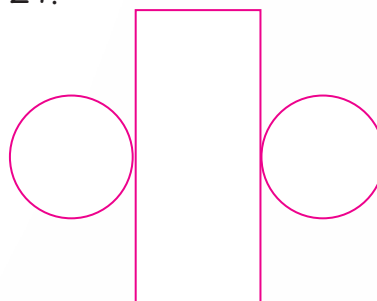
Δ.



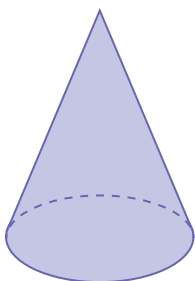
Ε.



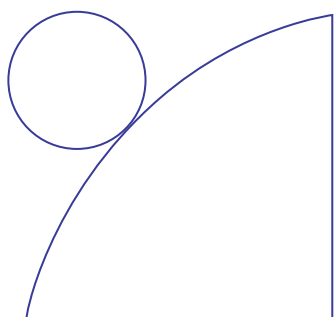
ΣΤ.



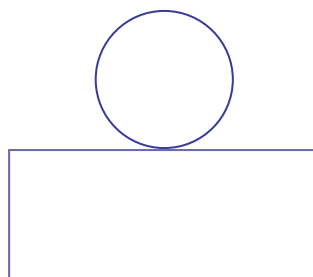
(β) Ποιο από τα πιο κάτω σχήματα είναι ανάπτυγμα κώνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



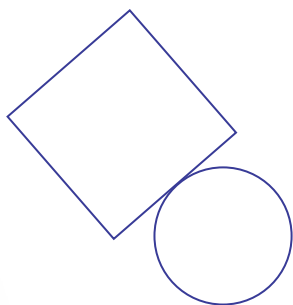
Α.



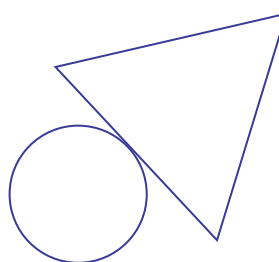
Β.



Γ.



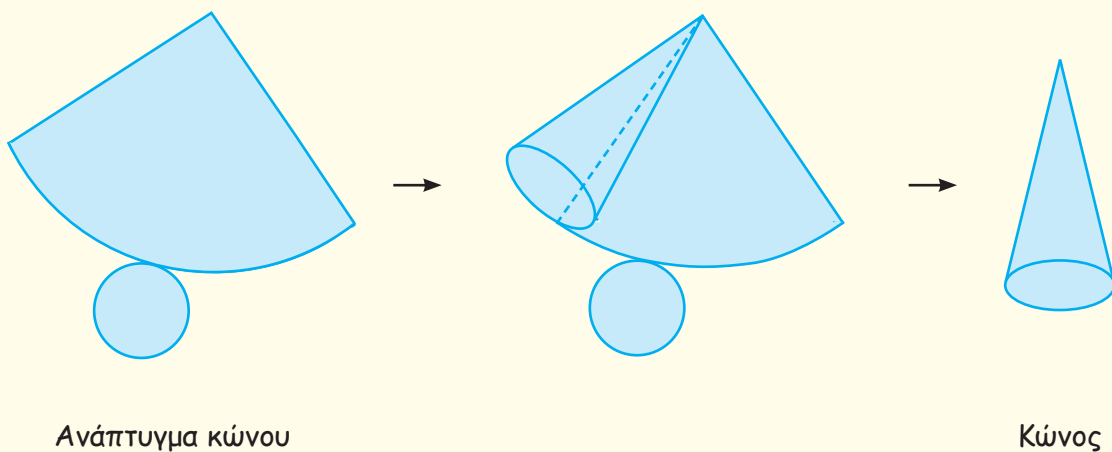
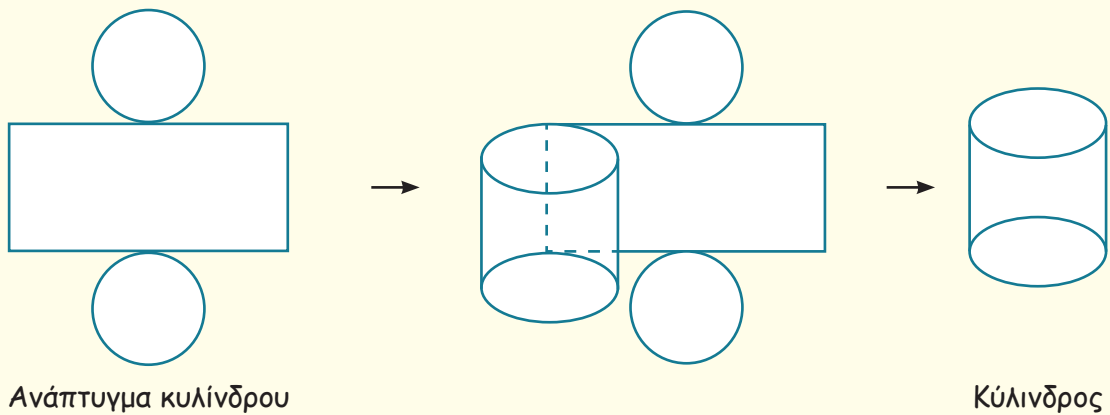
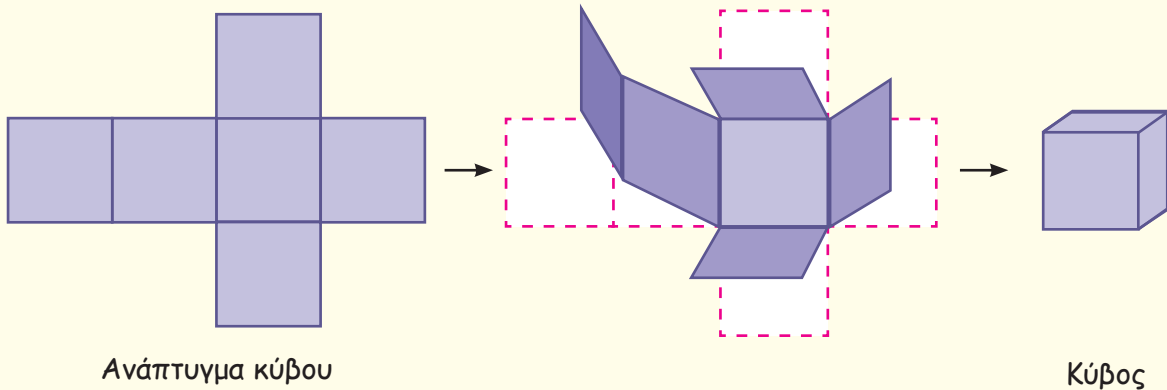
Δ.



Νέες Έννοιες

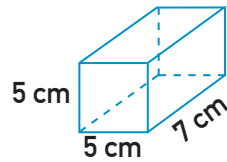
- **Ανάπτυγμα** ονομάζεται η δισδιάστατη αναπαράσταση ενός τρισδιάστατου σχήματος.

Παραδείγματα:

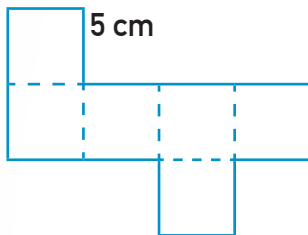


Παράδειγμα

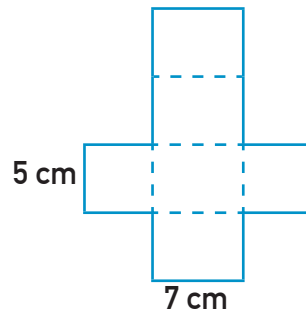
1. Ποιο από τα αναπτύγματα, όταν διπλωθεί στις διακεκομμένες γραμμές, σχηματίζει το διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;



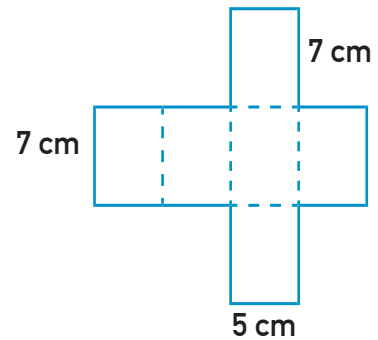
A



B

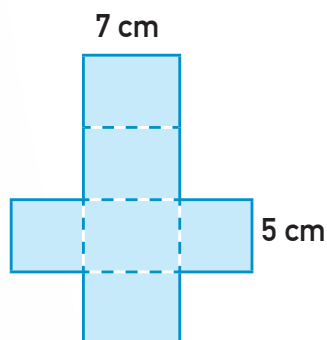


Γ

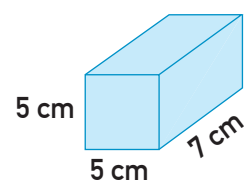
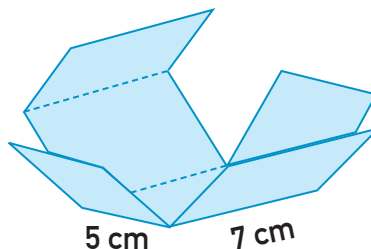


Λύση:

Το ανάπτυγμα Β, όταν διπλωθεί στις διακεκομμένες γραμμές, σχηματίζει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



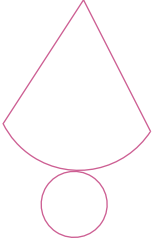
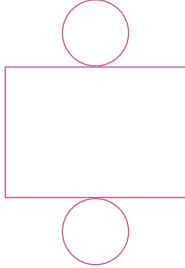
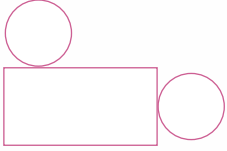
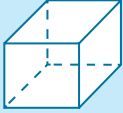
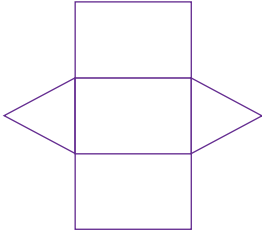
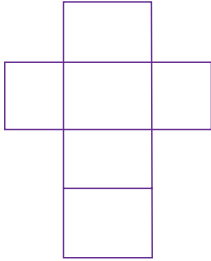
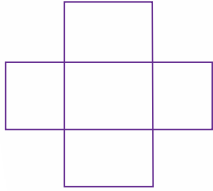
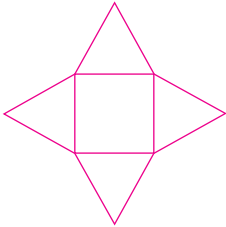
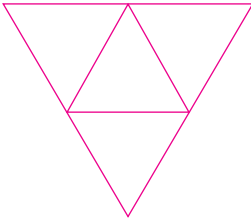
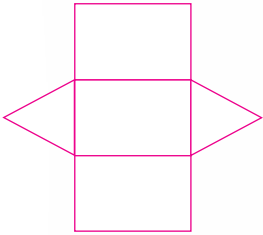
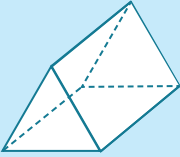
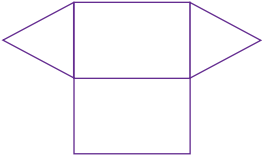
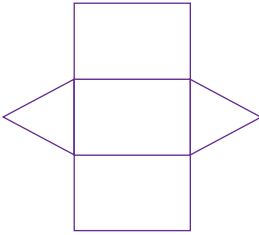
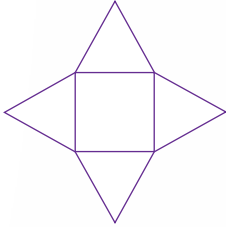
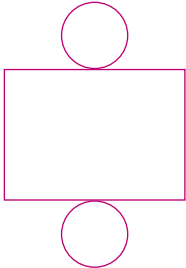
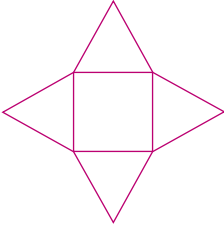
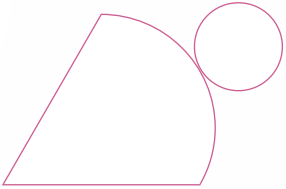
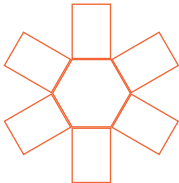
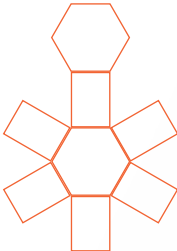
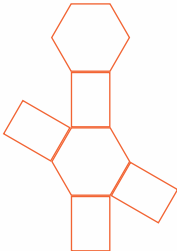
Ανάπτυγμα ορθογωνίου
παραλληλεπιπέδου



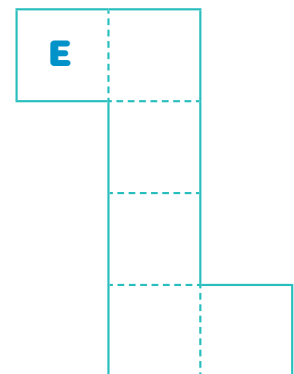
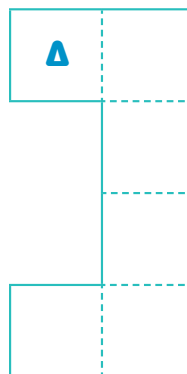
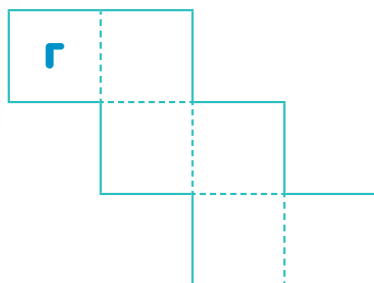
Ορθογώνιο
παραλληλεπίπεδο

Δραστηριότητες

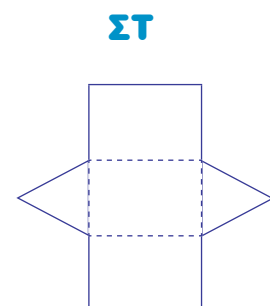
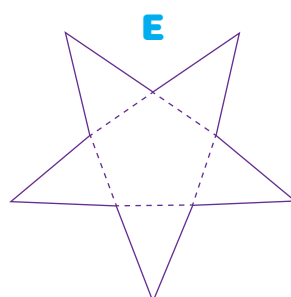
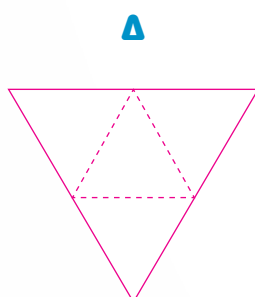
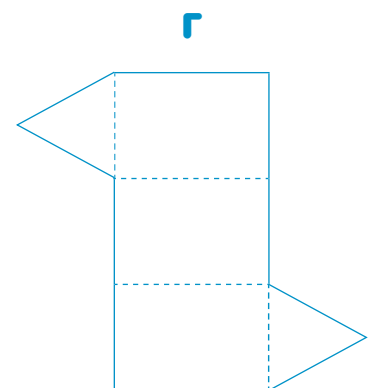
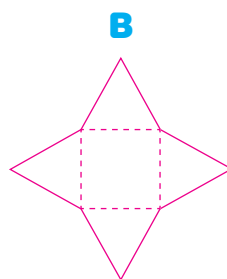
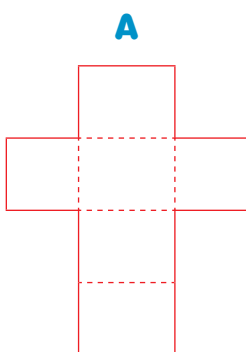
1. Να βάλετε σε κύκλο το ανάπτυγμα που ταιριάζει σε κάθε στερεό.

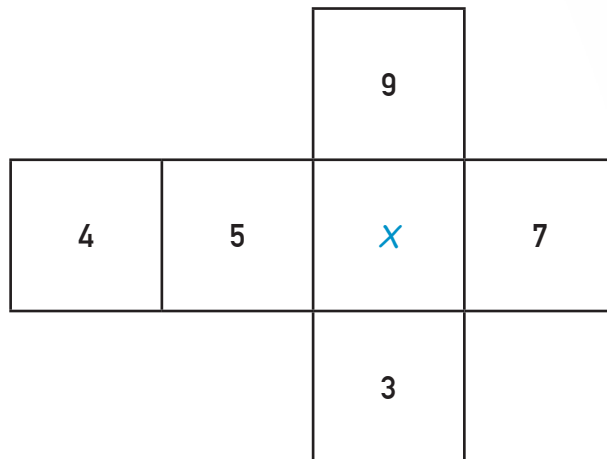
2. Να βάλετε σε κύκλο τα αναπτύγματα τα οποία όταν διπλωθούν στις διακεκομμένες γραμμές, σχηματίζουν κύβο.



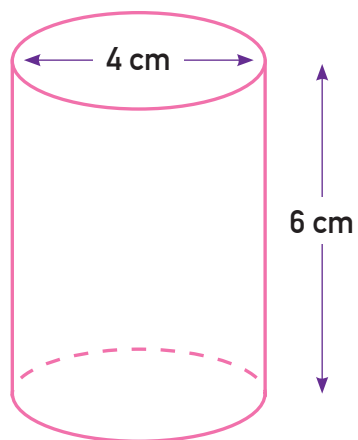
3. Να βάλετε σε κύκλο τα αναπτύγματα τα οποία όταν διπλωθούν στις διακεκομμένες γραμμές, σχηματίζουν πυραμίδα.



4. Το πιο κάτω ανάπτυγμα, όταν διπλωθεί, δίνει έναν κύβο. Οι απέναντι έδρες του κύβου έχουν άθροισμα 12. Ποιον αριθμό αναπαριστά το X;

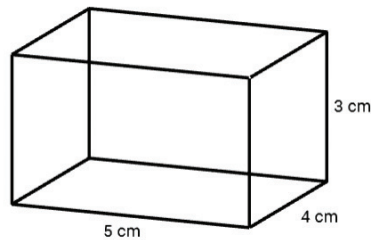


5. Να κατασκευάσετε το ανάπτυγμα του πιο κάτω κυλίνδρου.



Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο, για να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα.

Υπολογισμός όγκου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου



Πόσοι κύβοι μοναδιαίων διαστάσεων χρειάζονται, για να γεμίσει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μήκους 5 cm, πλάτους 4 cm και ύψους 3 cm; Ποιος είναι ο όγκος του;

☐ Όγκος

<https://www.geogebra.org/m/eXJ92J3d>

(α) Πόσοι κύβοι χρειάζονται για να γεμίσει μια σειρά;

(β) Πόσες σειρές χρειάζονται, για να γεμίσει ένα στρώμα;

(γ) Πόσοι κύβοι χρειάζονται, για να γεμίσει η βάση του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου;

(δ) Ποιο είναι το εμβαδόν της βάσης του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου;

(ε) Πόσα στρώματα χρειάζονται, για να γεμίσει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

(στ) Πόσοι κύβοι χρειάστηκαν, για να γεμίσει το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

(ζ) Να εισηγηθείτε δύο διαφορετικούς τρόπους για τον υπολογισμό του όγκου του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, με βάση τον τρόπο που εργαστήκατε στο εφαρμογίδιο.

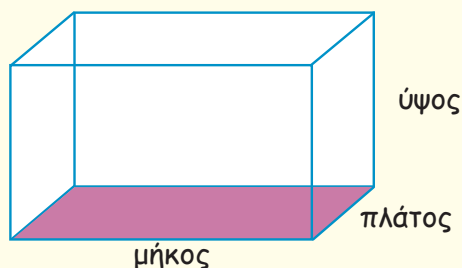
Νέες Έννοιες

- Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ο **όγκος** ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (V) είναι ίσος με το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος επί το ύψος του.

$$V = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \cdot \text{ύψος}$$

ή



Ο **όγκος** ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (V) είναι ίσος με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος του.

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot \text{ύψος}$$

Παράδειγμα:

Το πιο κάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4 cm, πλάτος 3 cm και ύψος 5 cm.

$$V = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \cdot \text{ύψος}$$

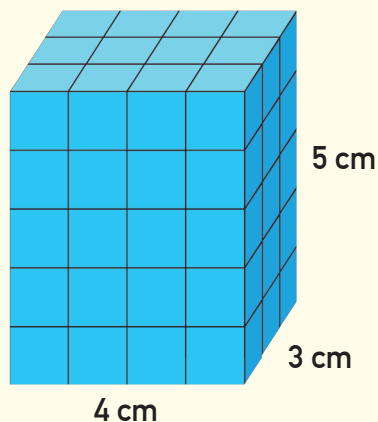
$$V = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$

ή

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot \text{ύψος}$$

$$E_{\text{βάσης}} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

$$V = 12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$$



Παράδειγμα

1. Μια συσκευασία δημητριακών σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 25 cm, πλάτος 8 cm και ύψος 30 cm. Ποιος είναι ο όγκος της συσκευασίας;



Λύση:

$$V = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \cdot \text{ύψος}$$

$$\text{Άρα, } V = 25 \cdot 8 \cdot 30 = 6000 \text{ cm}^3$$

ή

$$V = E_{\text{βάσης}} \cdot \text{ύψος}$$

$$E_{\text{βάσης}} = 25 \cdot 8 = 200 \text{ cm}^2$$

Άρα,

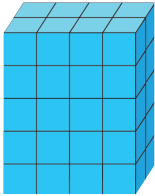
$$V = 200 \cdot 30 = 6000 \text{ cm}^3$$

Ο όγκος της συσκευασίας είναι 6000 cm³.

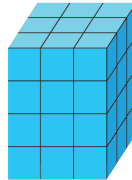
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με 2 διαφορετικούς τρόπους.

(α)



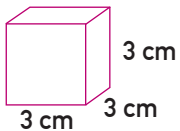
(β)



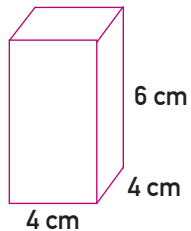
(γ)



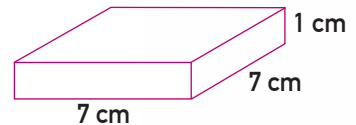
(δ)



(ε)

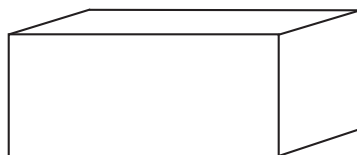


(στ)

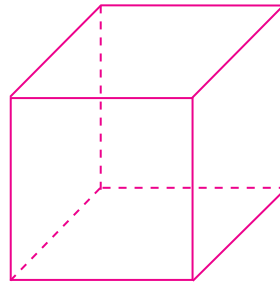
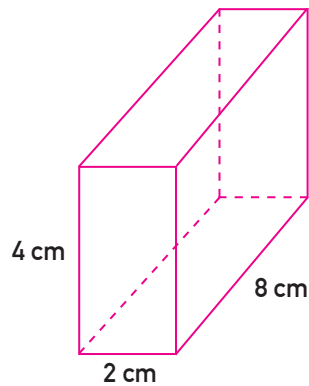


2. Ο όγκος του πιο κάτω ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 42 cm^3 και το μήκος της ακμής a είναι 3 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της έδρας με κίτρινο χρώμα.

a



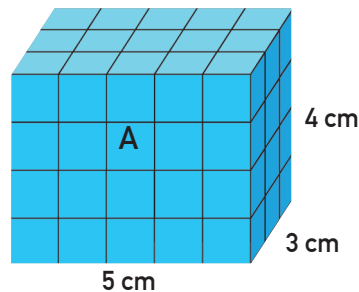
3. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύβος στην πιο κάτω εικόνα έχουν τον ίδιο όγκο. Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του κύβου.



4.



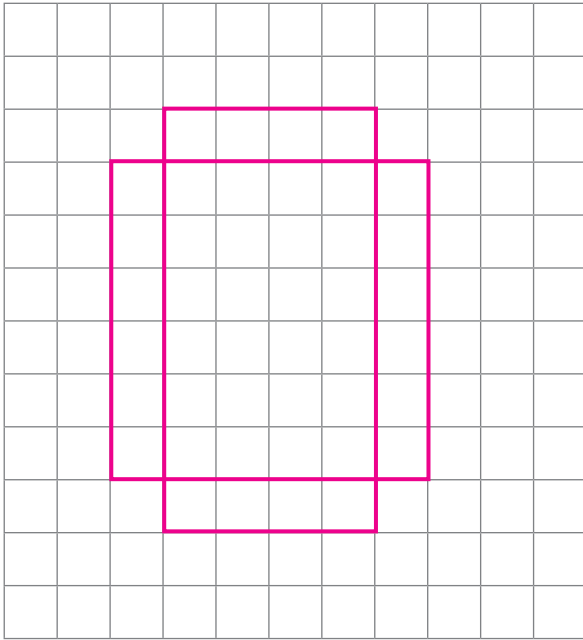
Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Α θα διπλασιαστεί, αν διπλασιαστούν οι διαστάσεις του.



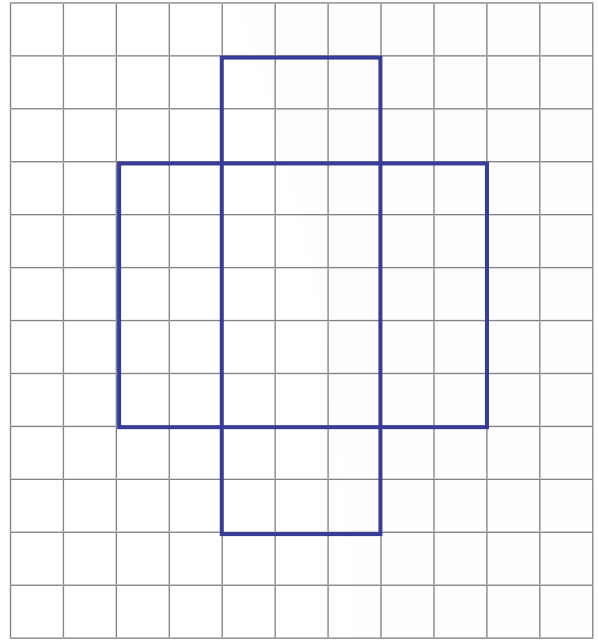
Συμφωνείτε με τη Μαρίνα; Να επεξηγήσετε.

5. Ο Θεοφάνης έχει τα πιο κάτω αναπτύγματα, τα οποία όταν διπλωθούν, σχηματίζουν κιβώτια ανοικτά από πάνω. Ποιο από τα αναπτύγματα, όταν διπλωθεί, θα δώσει το κιβώτιο με τον μεγαλύτερο όγκο; Να επεξηγήσετε.

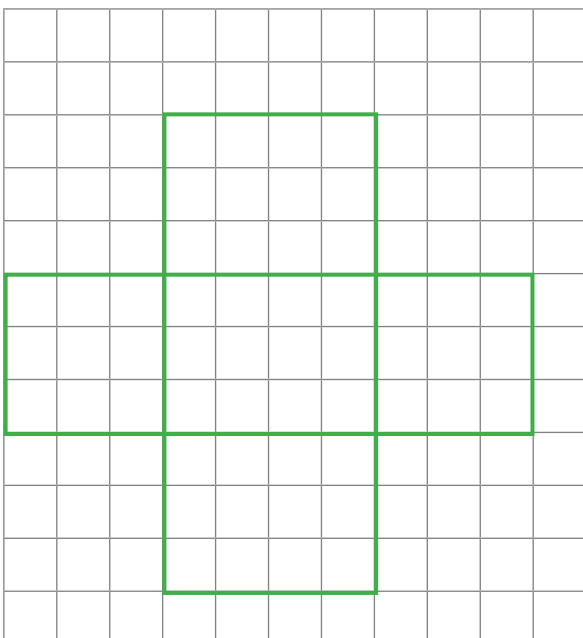
A.



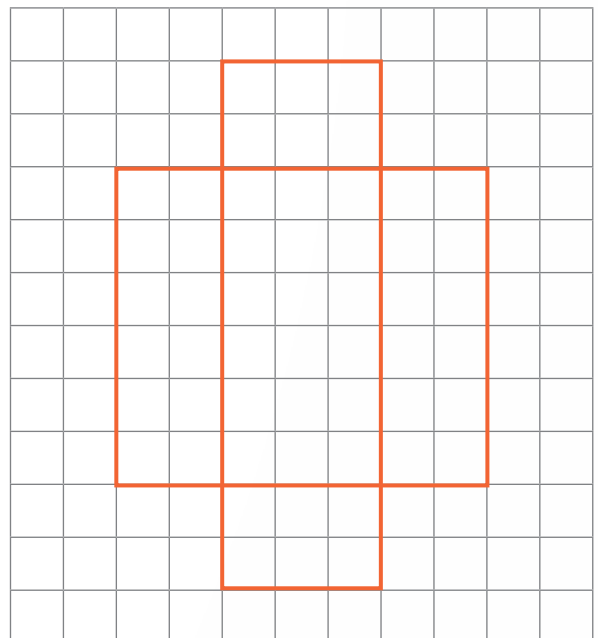
B.



Γ.

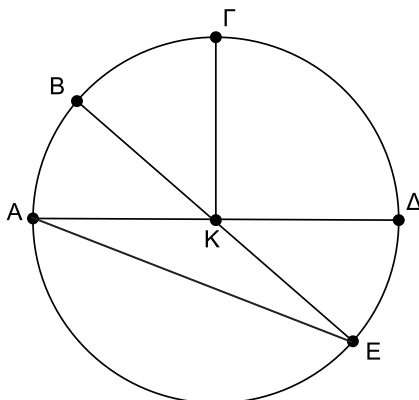


Δ.



Δραστηριότητες ενότητας

1. Να αντιστοιχίσετε, όπως στο παράδειγμα.



Ακτίνα κύκλου

Διάμετρος κύκλου

Ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ

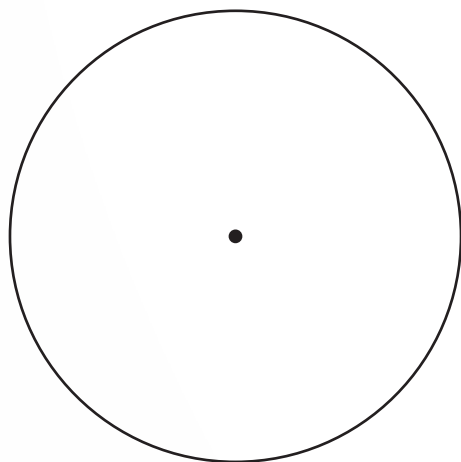
Ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ

Ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ

Ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ

Ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ

2. Να κατασκευάσετε μια ακτίνα και μια διάμετρο στον πιο κάτω κύκλο, χρησιμοποιώντας τον χάρακά σας και να τις ονομάσετε.



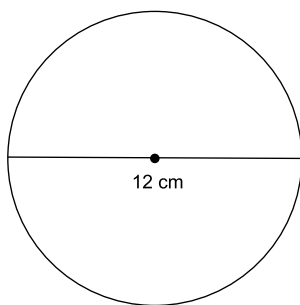
Ακτίνα κύκλου: _____

Διάμετρος κύκλου: _____

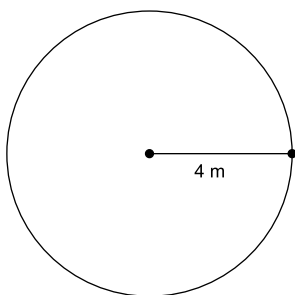
3. Να χρησιμοποιήσετε χάρακα και διαβήτη, για να κατασκευάσετε έναν κύκλο με ακτίνα 2 cm.

4. Να υπολογίσετε το μήκος των πιο κάτω κύκλων.

(α)



(β)



5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αντικείμενο σε σχήμα κύκλου	Ακτίνα	Διάμετρος	Μήκος
Ρολόι τοίχου	10 cm		
Ρολόι χειριού		40 mm	
Χαλί	75 cm		
Τροχός ποδηλάτου			94,2 cm

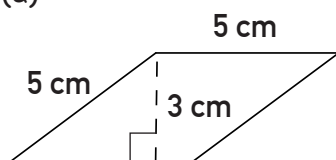
6. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) Ένας ξυλουργός θα τοποθετήσει ξύλινη κορνίζα σε έναν κυκλικό καθρέφτη με ακτίνα 30 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της ξύλινης κορνίζας που θα χρειαστεί ο ξυλουργός.

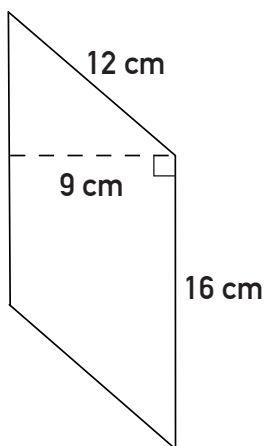
(β) Η ρόδα «London Eye» στο Λονδίνο έχει διάμετρο 120 m. Να υπολογίσετε την απόσταση που καλύπτει ένα βαγόνι, μετά από μια πλήρη περιστροφή της ρόδας.

7. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων.

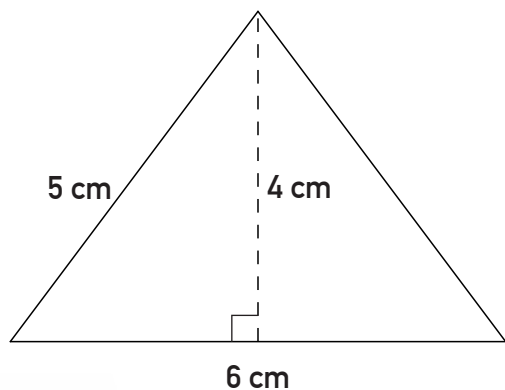
(α)



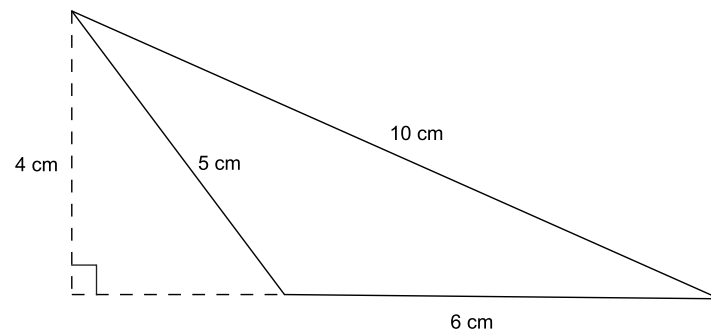
(β)



(γ)

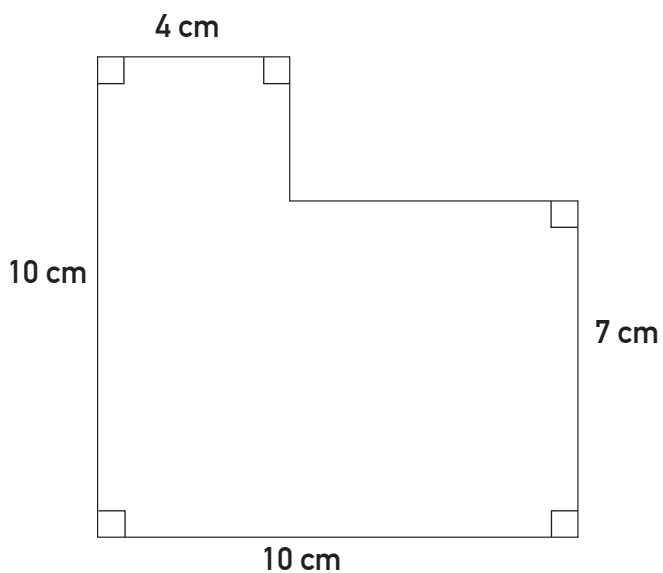


(δ)

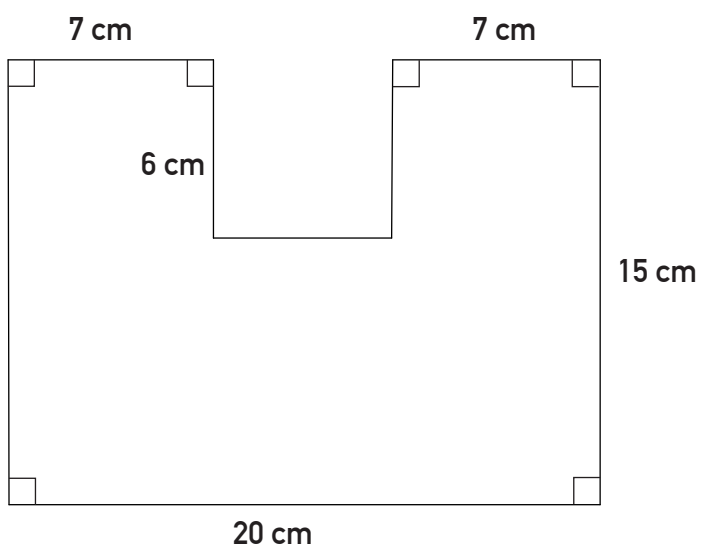


8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων.

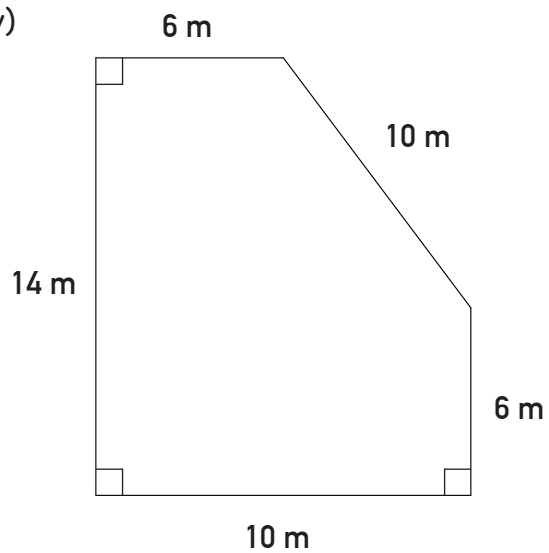
(α)



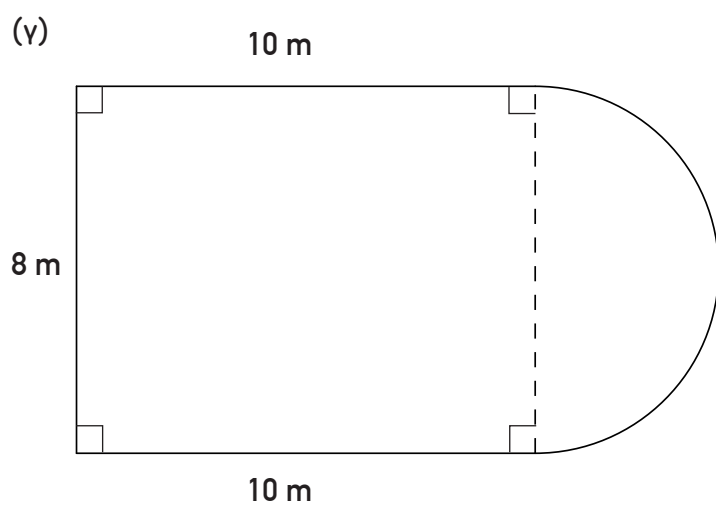
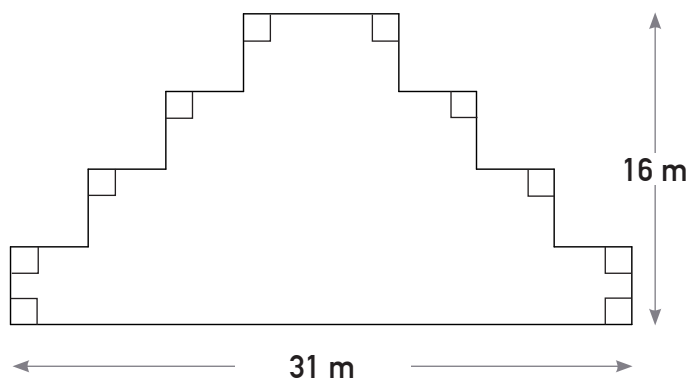
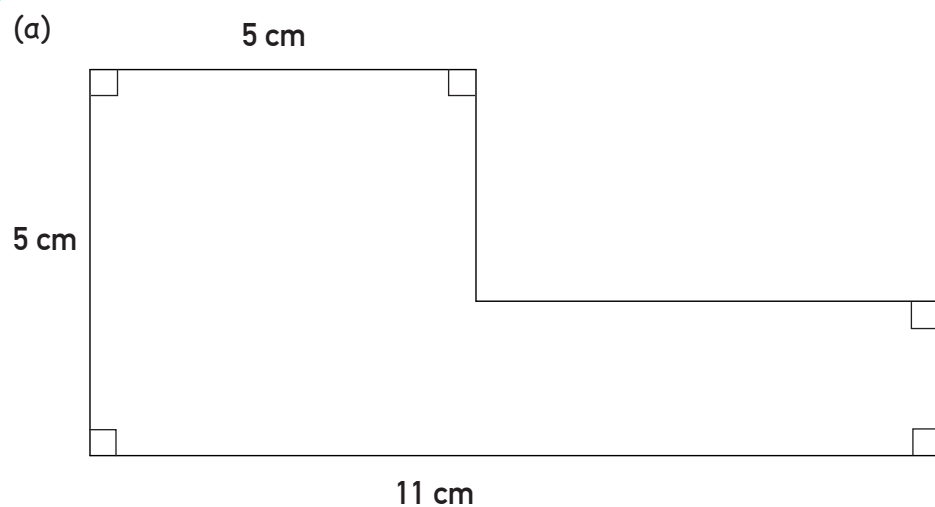
(β)



(γ)



9. Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων.

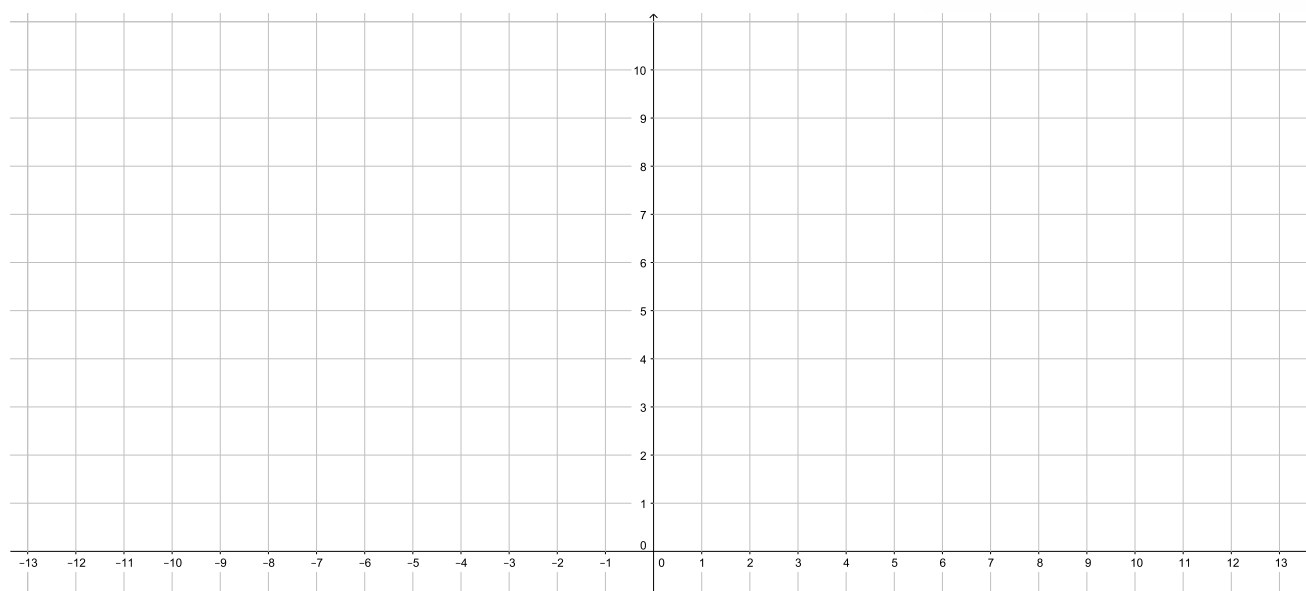


10. (α) Να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΚΛΜ με συντεταγμένες:

Κ (4,3)

Λ (8,1)

Μ (3,1)



(β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα του τριγώνου ΚΛΜ με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

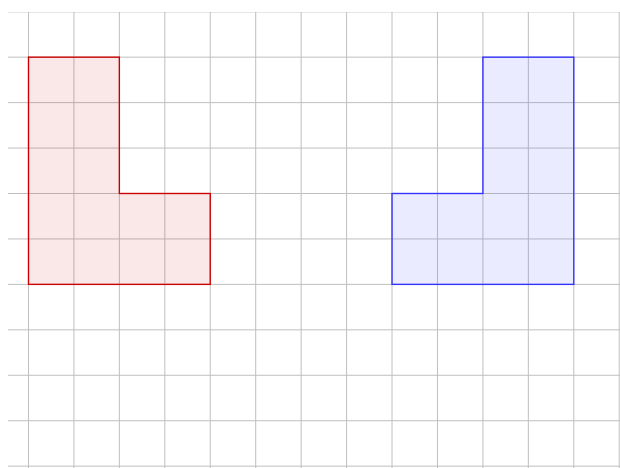
Κ' (,)

Λ' (,)

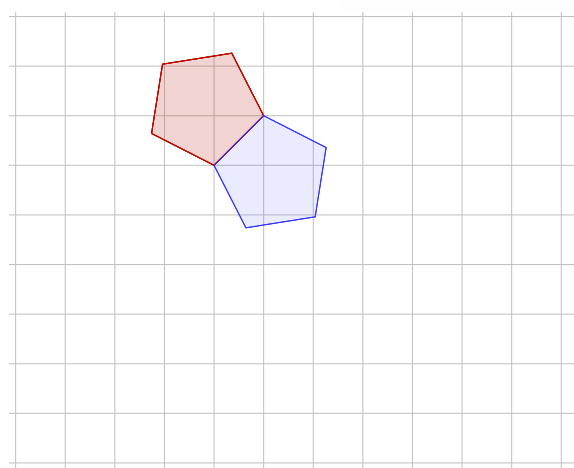
Μ' (,)

11. Το μπλε σχήμα είναι συμμετρικό του κόκκινου σχήματος. Να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας σε κάθε περίπτωση.

(α)

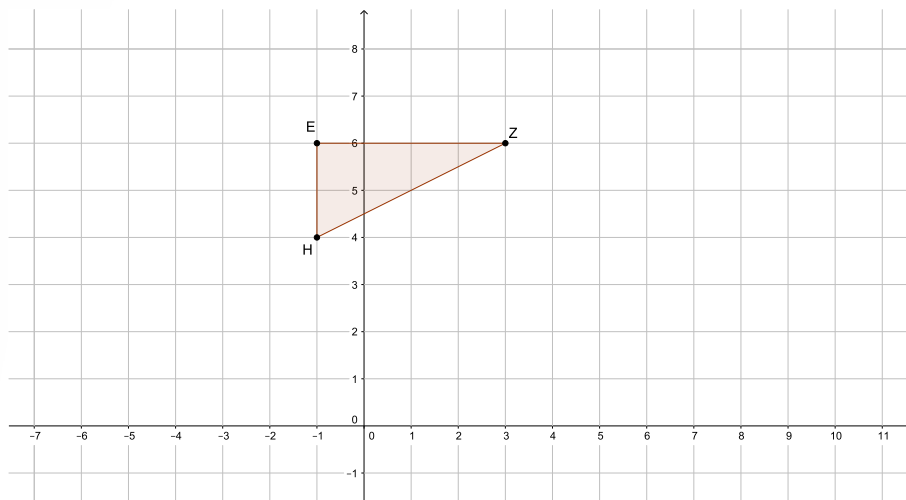


(β)

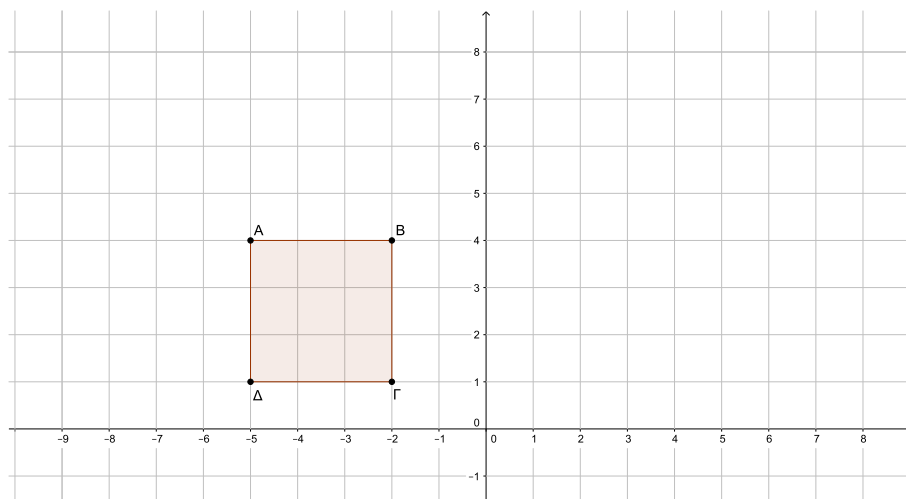


12. Να κατασκευάσετε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού, αν το σχήμα μετακινηθεί:

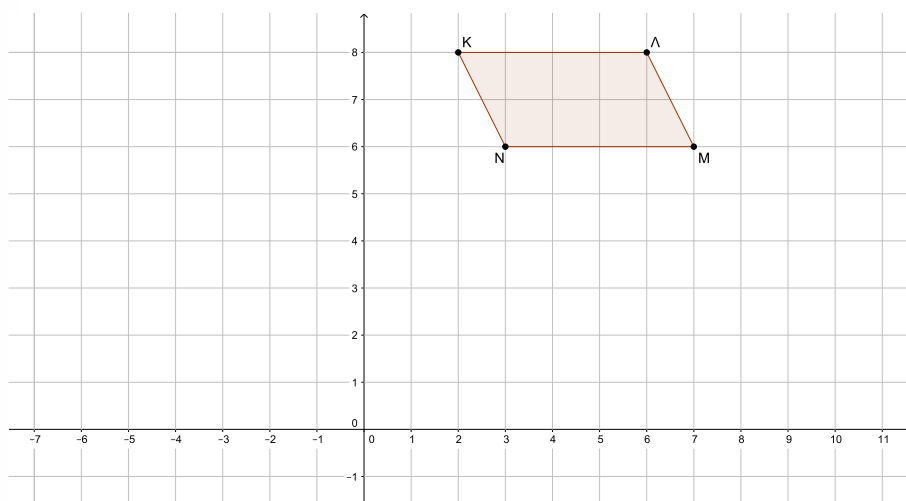
(α) 4 τετράγωνα κάτω



(β) 3 τετράγωνα αριστερά

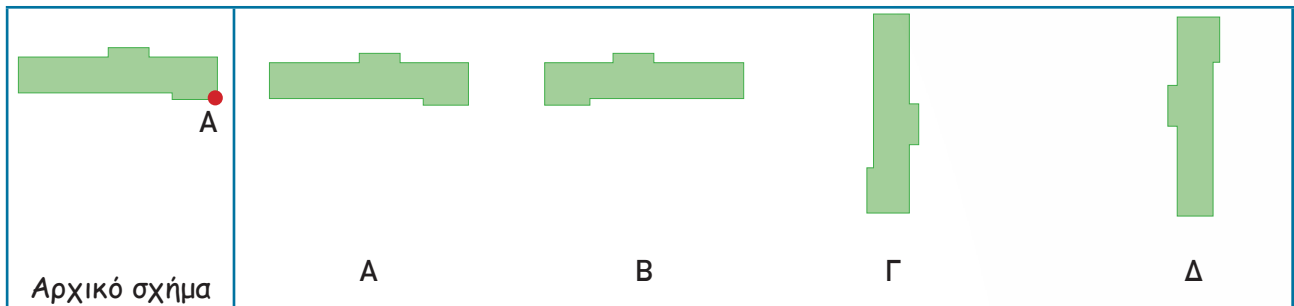


(γ) 3 τετράγωνα κάτω

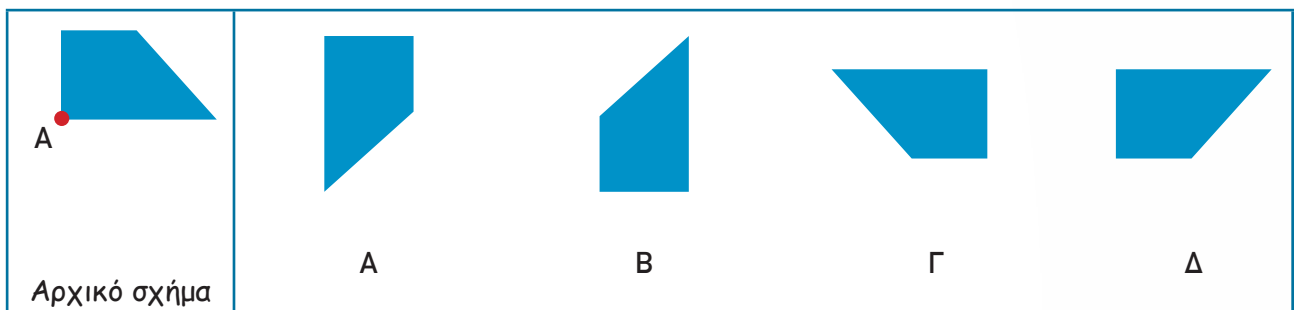


13. Ποιο σχήμα θα προκύψει, όταν το αρχικό σχήμα περιστραφεί γύρω από το σημείο A:

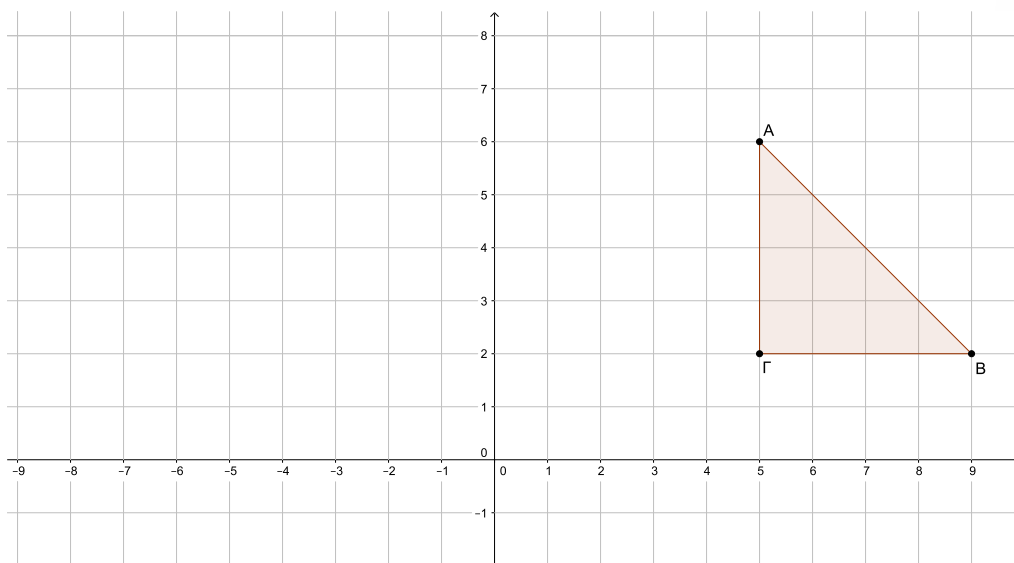
(α) δεξιόστροφα κατά 90° ;



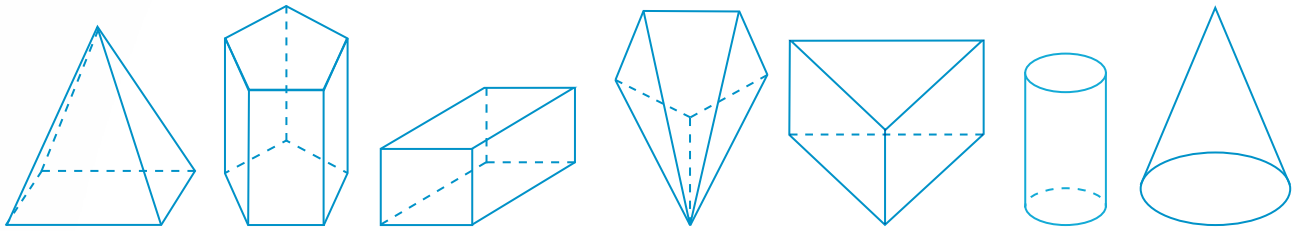
(β) αριστερόστροφα κατά 180° ;

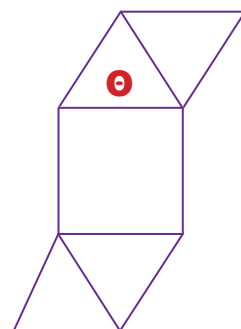
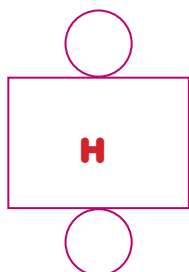
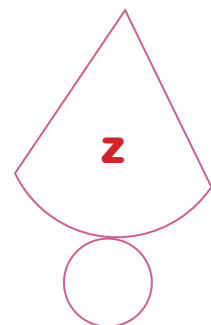
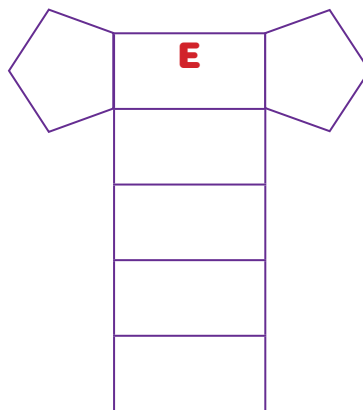
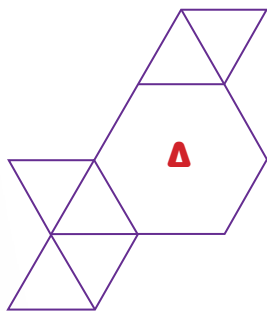
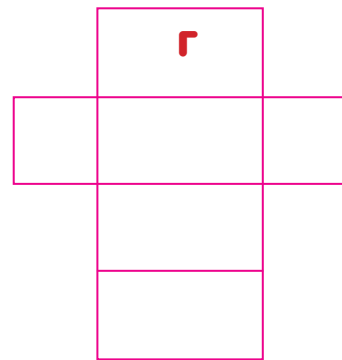
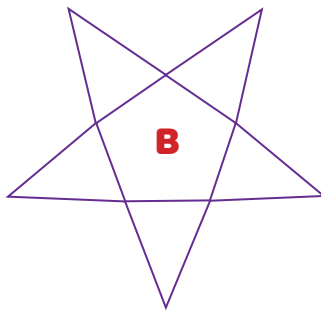
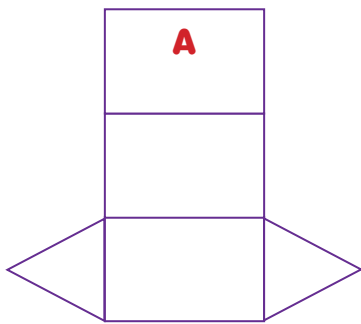


14. Το σχήμα ABΓ θα περιστραφεί αριστερόστροφα κατά 90° γύρω από το σημείο Γ. Να σχεδιάσετε το σχήμα που θα προκύψει από την περιστροφή και να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

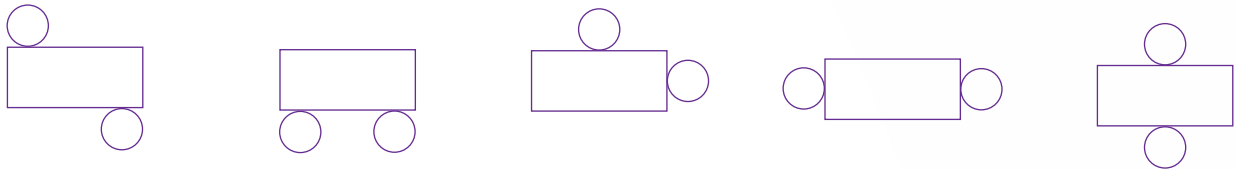


15. Να γράψετε το ανάπτυγμα που αντιστοιχεί σε κάθε στερεό.

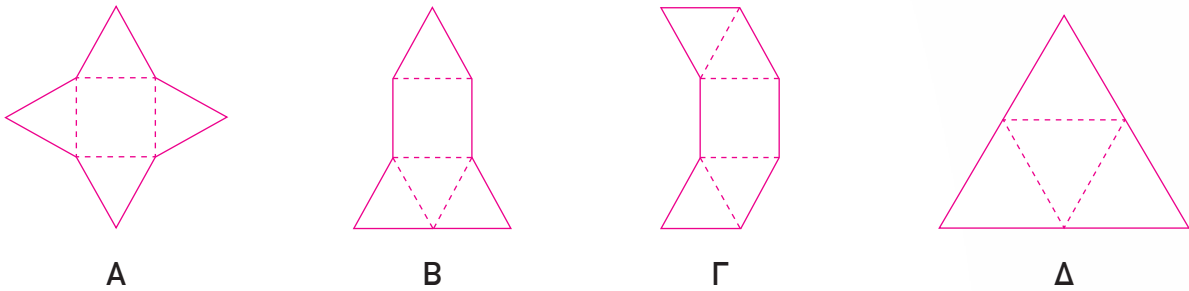




16. Να βάλετε σε κύκλο τα αναπτύγματα τα οποία, όταν διπλωθούν σχηματίζουν κύλινδρο.

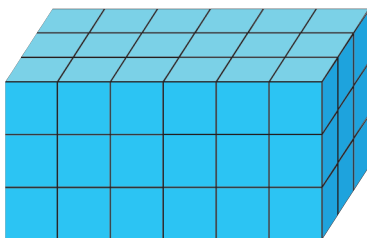


17. Να βάλετε σε κύκλο τα αναπτύγματα τα οποία, όταν διπλωθούν στις διακεκομμένες γραμμές, σχηματίζουν πυραμίδα.

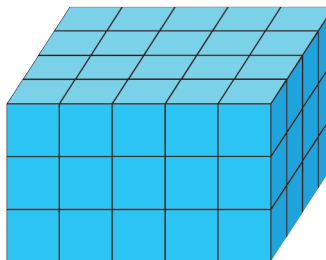


18. Να υπολογίσετε τον όγκο των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

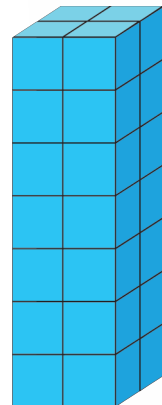
(α)



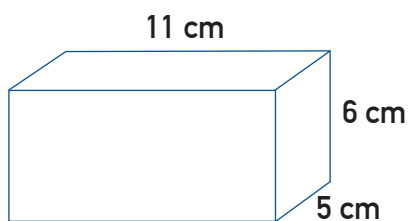
(β)



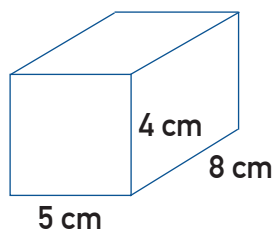
(γ)



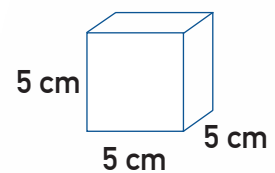
(δ)



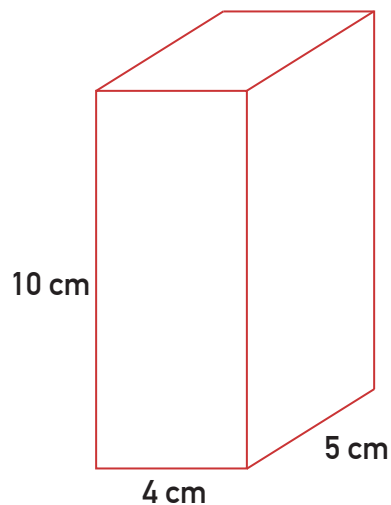
(ε)



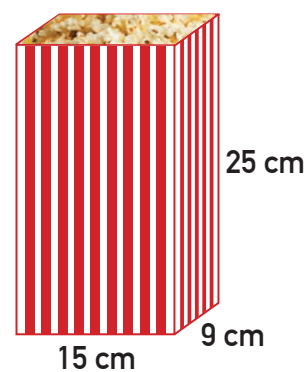
(στ)



19. Το εμβαδόν βάσης ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 25 cm^2 . Να υπολογίσετε το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αν έχει τον ίδιο όγκο με το πιο κάτω σχήμα.



20. Στον κινηματογράφο «Κόσμος» θα κυκλοφορήσει μια νέα συσκευασία πώλησης ποπ κορν σε σχήμα κύβου. Η νέα συσκευασία θα έχει τον ίδιο όγκο με τη συσκευασία της διπλανής εικόνας. Ποιες θα είναι οι διαστάσεις της νέας συσκευασίας;



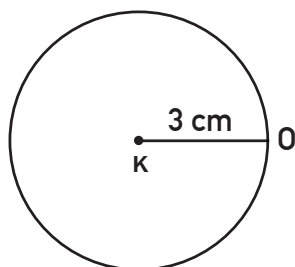
Δραστηριότητες εμπλουτισμού

1. Να σχεδιάσετε τα σημεία A , B και Γ στο πιο κάτω σχήμα, ώστε:

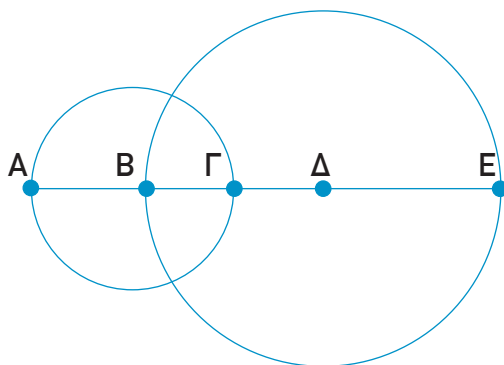
(α) η απόσταση του σημείου A από το κέντρο του κύκλου να είναι 2 cm

(β) η απόσταση του σημείου B από το κέντρο του κύκλου να είναι 3 cm

(γ) η απόσταση του σημείου Γ από το κέντρο του κύκλου να είναι 4 cm



2. Ο κύκλος με κέντρο το σημείο B έχει ακτίνα 4 cm και ο κύκλος με κέντρο το σημείο Δ έχει ακτίνα 7 cm .



Να υπολογίσετε το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων:

$ΑΓ = \dots\dots\dots$ $ΒΕ = \dots\dots\dots$ $ΒΓ = \dots\dots\dots$

$ΒΔ = \dots\dots\dots$ $ΓΔ = \dots\dots\dots$ $ΑΕ = \dots\dots\dots$

3. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση τον λόγο του μήκους του κύκλου M προς το μήκος του κύκλου K .

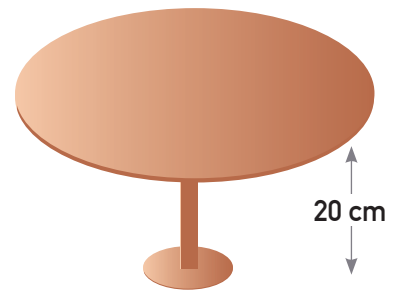
(α) Ο κύκλος K έχει ακτίνα χ . Ο κύκλος M έχει ακτίνα 2χ .

(β) Ο κύκλος K έχει διάμετρο ψ . Ο κύκλος M έχει διάμετρο 2ψ .

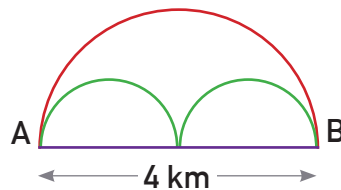
(γ) Ο κύκλος K έχει ακτίνα ω . Ο κύκλος M έχει ακτίνα 3ω .

4. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

- (α) Η κυρία Αθηνά θα αγοράσει τραπεζομάντιλο για ένα κυκλικό τραπέζι που έχει διάμετρο 80 cm. Θέλει το τραπεζομάντιλο να πέφτει από την άκρη του τραπεζιού 20 cm γύρω γύρω. Πόση θα πρέπει να είναι η ακτίνα του τραπεζομάντιλου που θα αγοράσει;



- (β) Ο Θανάσης και η Στέλλα μελετούν τον χάρτη ενός δασικού πάρκου. Για να τρέξουν από το σημείο Α στο σημείο Β, θα πρέπει να επιλέξουν ανάμεσα στις δύο πιο κάτω διαδρομές:



Η πρώτη διαδρομή ακολουθεί ένα μεγάλο ημικύκλιο (στον χάρτη είναι σημειωμένη με κόκκινο χρώμα). Η δεύτερη διαδρομή ακολουθεί δύο μικρά ημικύκλια (στον χάρτη είναι σημειωμένη με πράσινο χρώμα).

Ποια από τις δύο διαδρομές είναι μεγαλύτερη; Να επεξηγήσετε.

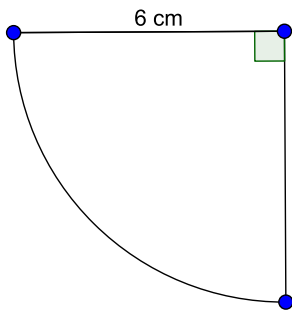
- (γ) Ο μεγάλος τροχός του ποδηλάτου έχει διάμετρο 80 cm, ενώ ο μικρός τροχός έχει διάμετρο 40 cm.

- (i) Πόση απόσταση θα καλύψει το ποδήλατο, αν ο μεγάλος τροχός γυρίσει 2 φορές;
(ii) Πόση απόσταση θα καλύψει το ποδήλατο, αν ο μικρός τροχός γυρίσει 10 φορές;

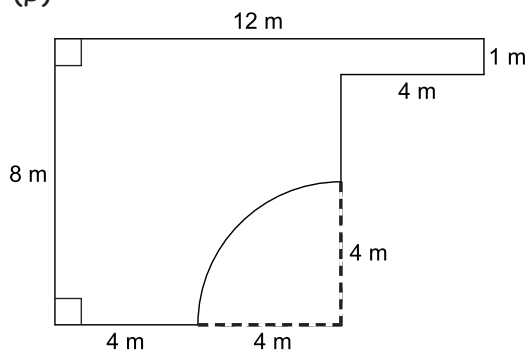


5. Να υπολογίσετε την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων.

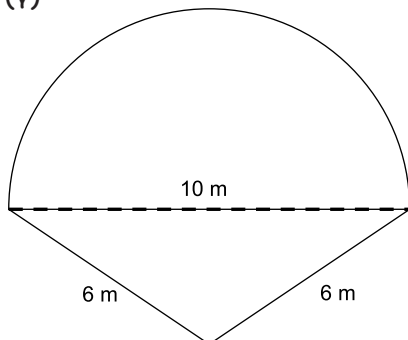
(α)



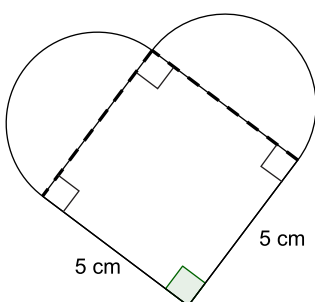
(β)



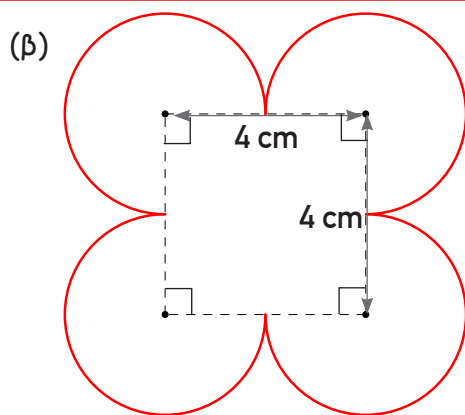
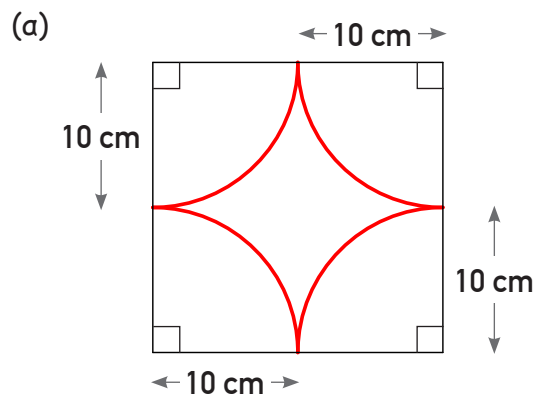
(γ)



(δ)



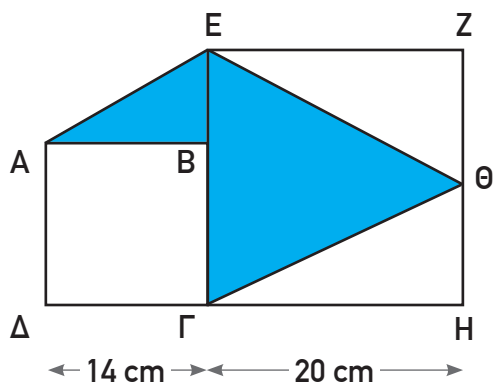
6. Να υπολογίσετε το μήκος της κόκκινης γραμμής σε κάθε περίπτωση.



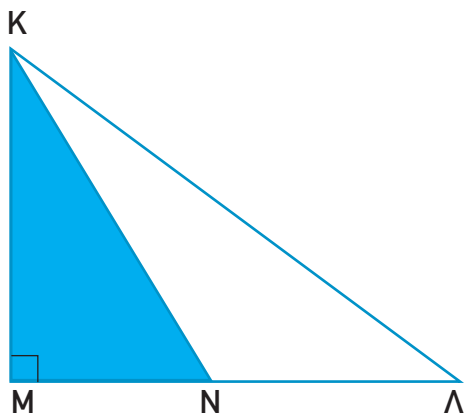
7. Τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα με βάση 10 cm και ύψος 25 cm, τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της άσπρης επιφάνειας.



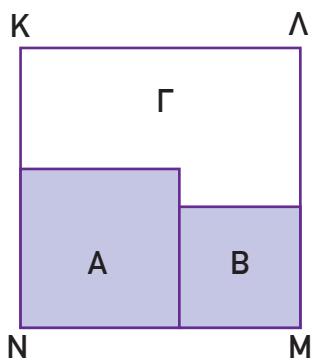
8. Στο πιο κάτω σχήμα, τα $ABΓΔ$ και $EΖΗΓ$ είναι τετράγωνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



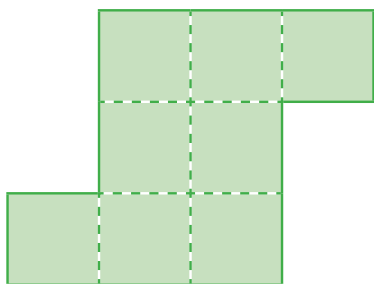
9. Το τρίγωνο KNM έχει εμβαδόν 20 cm^2 και το τρίγωνο $KΛM$ έχει εμβαδόν 44 cm^2 . Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $NΛ$, αν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος MN είναι 5 cm .



10. Το τετράγωνο $KΛMN$ αποτελείται από το τετράγωνο A με εμβαδόν 16 m^2 , το τετράγωνο B με εμβαδόν 9 m^2 και το σχήμα $Γ$. Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος $Γ$.

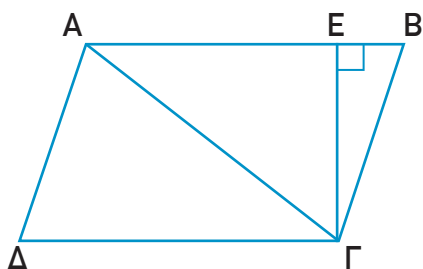


11. Το πιο κάτω σχήμα είναι κατασκευασμένο από 8 μικρά τετράγωνα. Η περίμετρος του σχήματος είναι 56 μονάδες. Ποιο είναι το εμβαδόν ενός μικρού τετραγώνου;



12. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση.

- (α) Ποιος είναι ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$;



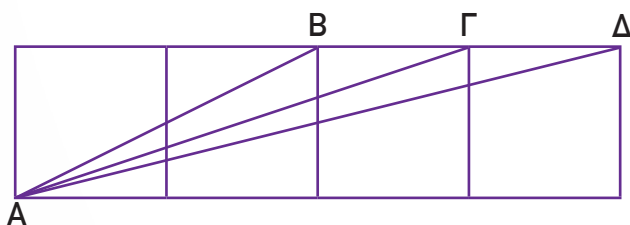
A. 2:3

B. 1:1

Γ. 1:2

Δ. 2:1

- (β) Στο πιο κάτω σχήμα κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 cm^2 . Ποιος είναι ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ προς το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma\Delta$;



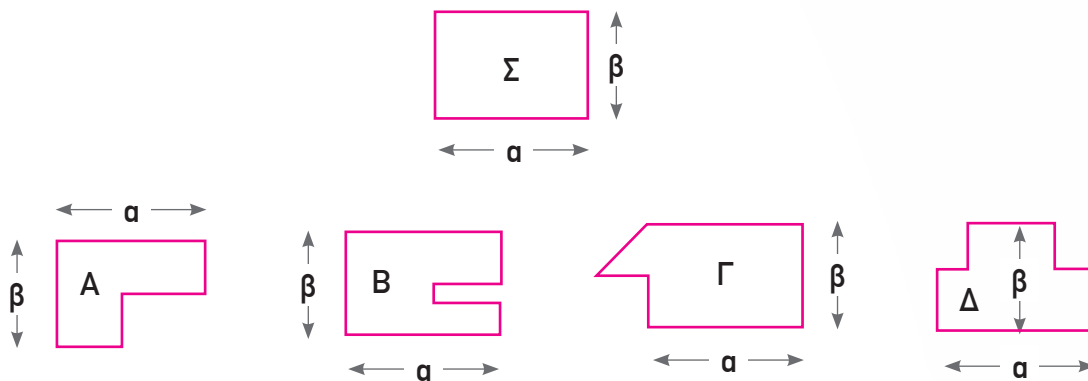
A. 2:3

B. 1:1

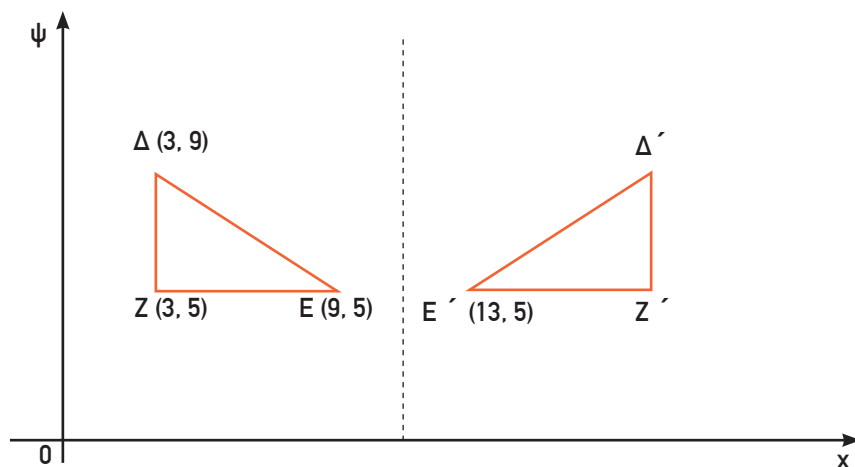
Γ. 1:2

Δ. 2:1

13. Ποια από τα πιο κάτω σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο με το σχήμα Σ;



14. Το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta'Z'E'$ είναι συμμετρικό του τριγώνου ΔEZ με άξονα συμμετρίας τη διακεκομμένη γραμμή. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών Δ' και Z' του τριγώνου $\Delta'Z'E'$.

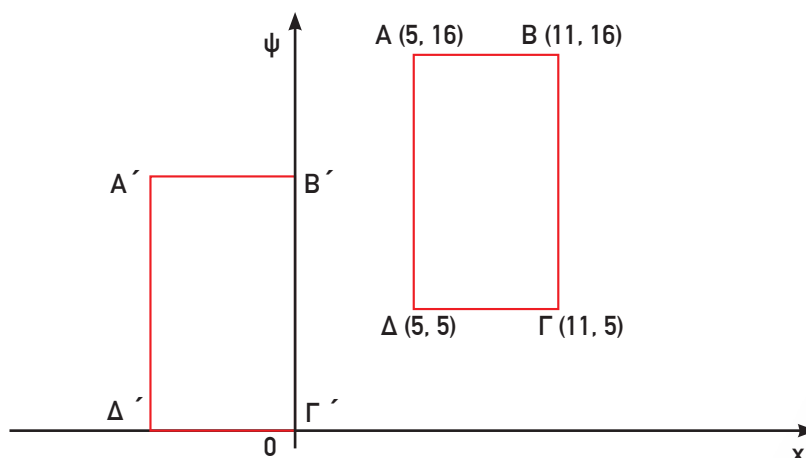


$\Delta' (\quad , \quad)$

$E' (\underline{13} , \underline{5})$

$Z' (\quad , \quad)$

15. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει μεταφερθεί, ώστε το σημείο Γ' να βρίσκεται στο σημείο $(0,0)$. Να γράψετε τις συντεταγμένες του ορθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$.



$A' (\quad , \quad)$

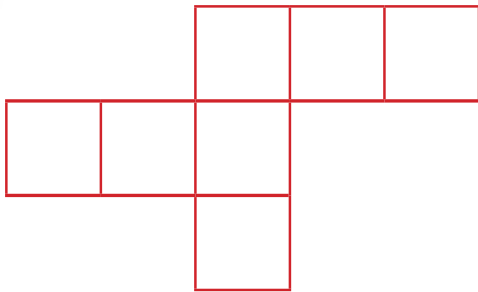
$B' (\quad , \quad)$

$\Gamma' (\quad , \quad)$

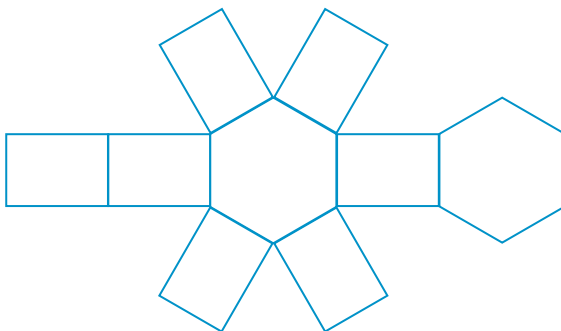
$\Delta' (\quad , \quad)$

16. Να αφαιρέσετε ένα πολύγωνο από κάθε ανάπτυγμα, ώστε όταν διπλωθεί να σχηματίζει:

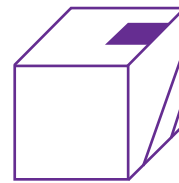
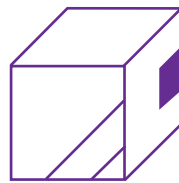
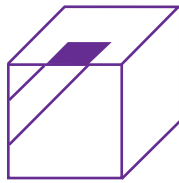
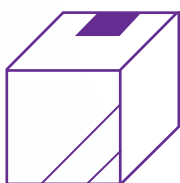
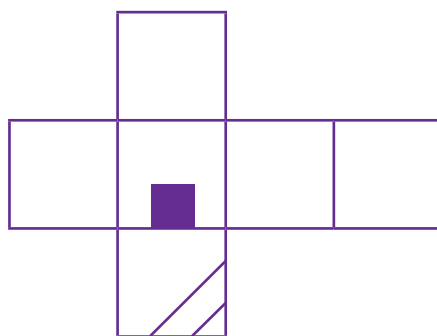
(α) κύβο



(β) εξαγωνικό πρίσμα



17. Σε ποιον κύβο ανήκει το ανάπτυγμα; Να τον βάλετε σε κύκλο.



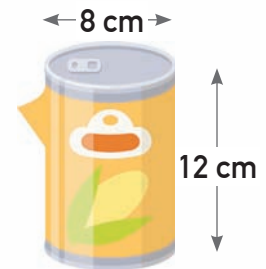
18. Να επιλύσετε τα προβλήματα. Να εργαστείτε στο τετράδιό σας.

(α) Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Το μήκος του είναι $1,20\text{ m}$, το πλάτος του είναι 60 cm και το ύψος του 80 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού στο ενυδρείο, αν το νερό φτάνει σε ύψος 70 cm .

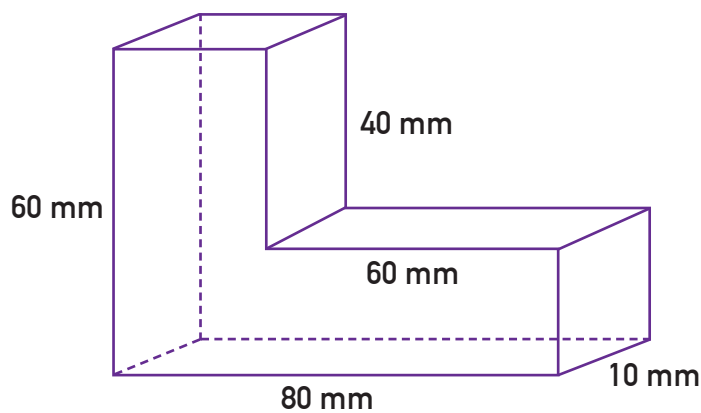
(β) Μια κυλινδρική κονσέρβα έχει ύψος 12 cm και διάμετρο βάσης 8 cm .

(i) Γύρω από την κονσέρβα τοποθετείται αυτοκόλλητη ετικέτα που καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια. Να υπολογίσετε το μήκος της ετικέτας.

(ii) Το υλικό της παράπλευρης επιφάνειας που απαιτείται για την κατασκευή της κονσέρβας κοστίζει $\text{€}0,25$ το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο είναι το κόστος της κατασκευής 1000 κονσέρβων;



19. Να υπολογίσετε τον όγκο του πιο κάτω στερεού.



20. Το πιο κάτω στερεό έχει όγκο 165 cm^3 . Να υπολογίσετε την τιμή του x .

